

Брянский государственный технический университет

На правах рукописи

МИХЕЕВ Геннадий Викторович

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ
АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ И УПРУГИХ ТЕЛ, ПОДВЕРЖЕННЫХ
МАЛЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор **Погорелов Д.Ю.**

Брянск - 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТЕЛ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	8
§ 1.1. Краткий анализ основ и обзор современного состояния в области моделирования динамики систем твердых тел.....	8
1.1.1. Краткая историческая справка и современное состояние.....	8
1.1.2. Основные соотношения кинематики и динамики систем твердых тел.....	12
1.1.2.1. Основные понятия.....	12
1.1.2.2. Описание относительной кинематики пары тел, связанных шарниром.....	15
1.1.2.3. Уравнения кинематики системы со структурой дерева.....	17
1.1.2.4. Уравнения кинематики систем с замкнутыми цепями.....	18
1.1.2.5. Динамика системы твердых тел.....	21
§ 1.2. Обзор подходов к формированию уравнений движения упругих тел...	25
1.2.1. Метод твердотельных элементов.....	27
1.2.2. Линейная теория динамики упругих тел.....	28
1.2.3. Метод последовательных приближений.....	28
1.2.4. Векторы больших поворотов.....	29
1.2.5. Метод присоединенной системы координат.....	29
1.2.6. Формулировка МКЭ в терминах абсолютных координат.....	32
§ 1.3. Выводы и задачи исследований.....	33
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ ГИБРИДНЫХ МОДЕЛЕЙ.....	36
§ 2.1. Метод подсистем – основа построения гибридных моделей.....	36
§ 2.2. Вывод соотношений для численного синтеза уравнений движения упругих подсистем.....	39
2.2.1. Основные допущения.....	39
2.2.2. Выражение кинетической энергии.....	44
2.2.3. Вывод уравнений движения упругой подсистемы с использованием уравнений Лагранжа II рода.....	45
§ 2.3. Методы понижения порядка системы уравнений движения упругой подсистемы.....	54
2.3.1. Статическая конденсация.....	55
2.3.2. Собственные формы колебаний.....	58
2.3.3. Метод связанных подструктур.....	60
§ 2.4. Эффективное решение обобщенной симметричной проблемы собственных значений.....	65
2.4.1. Предварительные замечания.....	65
2.4.2. Краткий обзор существующих методов решения симметричной проблемы собственных значений.....	66
2.4.2.1. Прямые методы.....	68

2.4.2.2. Методы аппроксимаций.....	69
§ 2.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений большого размера	74
§ 2.6. Волновой алгоритм перенумерации элементов структуры.....	80
§ 2.7. Выводы по результатам теоретических исследований. Общая схема методики построения гибридных моделей	83
ГЛАВА 3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ, ТЕСТИРОВАНИЕ И ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ	87
§ 3.1. Программная реализация методики.....	87
§ 3.2. Тестирование программы	96
3.2.1. Частоты закрепленной балки.....	96
3.2.2. Тестовая модель кривошипно-ползунного механизма с упругим шатуном.....	97
§ 3.3. Тестовое моделирование динамики автомотрисы АС4.....	101
§ 3.4. Исследование вибраций рамы щебнеочистительной машины ЦОМ 1200	109
§ 3.4. Выводы по результатам главы.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
Список литературы	120
ПРИЛОЖЕНИЯ	128
Приложение 1. Доказательство леммы.....	128
Приложение 2. Вывод уравнений движения упругой подсистемы на основе общего уравнения динамики	130
Приложение 3. Краткое изложение некоторых методов решения обобщенной проблемы собственных значений.....	135
Приложение 4. Формат файла input.fum.....	153

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное моделирование является в настоящее время одним из основных способов исследования динамики сложных механических систем. Оно стало неотъемлемым этапом проектирования конструкций, оптимизации их параметров и широко применяется в различных областях науки и техники, таких как железнодорожный и автомобильный транспорт, авиастроение, робототехника и пр.

Программы моделирования реализуют методы построения и анализа математических моделей объектов, разработанные на основе обобщенных подходов к описанию разнообразных конструктивных элементов, условий их взаимодействия и функционирования. Эффективность математических моделей определяется допущениями, которые принимаются в рамках таких подходов.

В основе современных программ, например, ADAMS (США), SIMPACK (Германия), EULER (Россия), лежит представление объекта исследований системой абсолютно твердых тел (СТТ), связанных посредством шарниров и силовых элементов. Подобный метод реализован также в программном комплексе «Универсальный механизм» (УМ), разработанном в Брянском государственном техническом университете под руководством профессора Погорелова Д.Ю., и весьма хорошо зарекомендовавшим себя по результатам решения широкого класса задач.

Однако многие исследования эффективны только с учетом упругости некоторых частей конструкции, что следует учитывать при построении математической модели. Таковыми, например, являются исследования вибраций кузова или рамы железнодорожного экипажа при движении с учетом воздействий от силового оборудования и неровностей пути.

Подобные задачи предполагают использование *гибридных* моделей, которые строятся на основе совмещения различных подходов при описании динамики конструкции.

К сожалению, автору не известны отечественные программы, реализующие моделирование методом гибридных моделей. Среди зарубежных пакетов можно отметить, например, ADAMS, который импортирует данные об упругих телах из программ анализа конструкций методом конечных элементов. Наиболее известные из них – ANSYS и NASTRAN. Всесторонняя оценка зарубежных программ затруднительна в силу малой доступности как самих пакетов, цена которых весьма высока, так и работ с описанием реализованных методов. Ситуация с публикациями в последние годы несколько улучшилась вследствие развития Интернета. Однако реализация теоретических основ почти всегда связана с множеством нюансов, учет которых нередко требует дополнительных исследований.

Целью работы является разработка и программная реализация на базе программного комплекса УМ методики построения и анализа математических моделей для исследований динамики гибридных механических систем.

В работе показано, что наиболее универсальным методом вывода уравнений движения упругих тел является метод *присоединенной системы координат* (ПСК), позволяющий моделировать тела, подверженные любым пространственным перемещениям. При этом упругие перемещения за счет деформаций малы. Метод ПСК использует линейный метод конечных элементов (МКЭ) на одном из этапов построения модели, что позволяет адекватно представить упругие характеристики широкого класса технических систем.

Анализ системы уравнений движения в терминах *узловых* координат путем интегрирования сильно затруднен по причине ее большого размера и наличия в решении высокочастотных составляющих, которые в реальных условиях гасятся внутренним демпфированием. Повышение эффективности осуществляется на основе перехода к формулировке в терминах *модальных* координат, что предполагает предварительное решение обобщенной проблемы собственных значений. Поиск собственных пар матричных пучков большого размера является нетривиальной задачей.

Таким образом, эффективное моделирование упругих тел в составе объекта исследований предполагает решение комплекса проблем, составляющими которого являются:

- синтез уравнений движения упругих тел;
- понижение порядка системы уравнений на основе модального анализа;
- решение обобщенной проблемы собственных значений для систем с большим числом степеней свободы;
- описание способов взаимодействия тел различной природы в составе модели.

Каждая из перечисленных проблем является этапом разрабатываемой методики и представляет собой относительно самостоятельную область исследований.

В главе 1 диссертации приведен обзор основных существующих методов численного моделирования систем абсолютно твердых и деформируемых тел. В параграфе 1.1 изложена краткая историческая справка, отражающая основные этапы становления науки моделирования. Рассмотрены основные соотношения кинематики и динамики систем абсолютно твердых тел, лежащие в основе алгоритмов, реализованных в программном комплексе УМ. В параграфе 1.2 приводится обзор существующих методов моделирования динамики упругих тел, проведен их сравнительный анализ, на основе которого метод ПСК выбирается в качестве базового для разрабатываемой методики. В параграфе 1.3 конкретизируются задачи, которые необходимо решить для достижения цели диссертационной работы.

В главе 2 излагаются теоретические основы каждого этапа разрабатываемой методики. В начале каждого параграфа главы 2 кратко анализируется современное состояние области исследований, после чего излагаются авторские предложения и разработки, выполненные, в том числе, и в соавторстве. В параграфе 2.1 описаны теоретические основы модификации метода подсистем, которая позволяет совмещать абсолютно твердые и деформируемые тела в составе гибридной модели. Параграф 2.2 посвящен выводу соотношений, на

основе которых строится алгоритм численного синтеза уравнений движения упругих тел. В параграфе 2.3 приведен анализ известных методов, применяемых для понижения порядка систем уравнений движения упругих тел, на основе которого самые эффективные из них выбраны для реализации. В параграфе 2.4 анализируются методы решения обобщенной проблемы собственных значений. Основное внимание при этом уделяется методу Ланцоша, на базе которого разработан эффективный алгоритм поиска собственных пар матричных пучков большого размера. Важной составляющей алгоритма является новый разработанный метод решения систем линейных алгебраических уравнений большого размера.

Третья глава посвящена тестированию и оценке эффективности разработанной методики на основе анализа результатов моделирования. Набор примеров включает расчет частот балки при различных вариантах закрепления, моделирование кривошипно-ползунного механизма, тестовое моделирование динамики автотрисы АС4 при движении, а также пример, имеющий прикладное значение – исследование вибраций рамы щебнеочистительной машины ЩОМ 1200 при различных режимах работы грохотов.

Заключение диссертации содержит описание результатов работы и выводы.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты 98-01-00782, 99-01-00223, 02-01-00364) и научной программе «Университеты России» (гранты УР.04.01.09, УР.04.01.046, УР.04.01.002).

ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТЕЛ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

В первой главе рассмотрены основы современных методов динамики систем тел. Параграф 1.1 посвящен моделированию динамики *систем абсолютно твердых тел (СТТ)*. В начале дана краткая историческая справка. Далее охарактеризованы современные технологии и тенденции развития этой области знаний. Приведены основные соотношения кинематики и динамики систем абсолютно твердых тел, лежащие в основе алгоритмов и методов, реализованных в программном комплексе «Универсальный механизм».

В параграфе 1.2 рассмотрены современные способы описания упругих тел. Указаны достоинства и недостатки каждого из них, на основе чего сделан выбор базового подхода для разработки методики построения гибридных моделей.

§ 1.1. Краткий анализ основ и обзор современного состояния в области моделирования динамики систем твердых тел

1.1.1. Краткая историческая справка и современное состояние

Фундаментом динамики систем тел является классическая механика, основы которой были заложены в 17-18 веках Ньютоном, Эйлером, Даламбером, Лагранжем. Уравнение движения свободной частицы впервые было опубликовано Ньютоном в 1686 году. Понятие "абсолютно твердое тело" было введено в 1775 году Эйлером. Моделируя связи в шарнирах силами реакций, он получил уравнения, известные в механике как уравнения Ньютона-Эйлера. В 1743 году Даламбер рассмотрел систему связанных твердых тел. Имея в виду принцип виртуальной работы, силы реакций он назвал «потерянными» силами. Математическую формулировку принципа Даламбера представил Лагранж. В 1788 году он положил начало анализу связанных механических систем. Применяв вариационный принцип к общей кинетической и потенциальной энергии сис-

темы с учетом ее кинематических связей, Лагранж получил уравнения движения, известные как уравнения Лагранжа первого и второго рода.

Первые приложения динамики систем тел связаны с гироскопами. Уравнения движения одиночного гироскопа получены Эйлером в 1758 году. Однако инженерные приложения теории гироскопов появились только в начале 20-го столетия.

В 1906 году Фишер предпринял первые попытки исследований на основе системы абсолютно твердых тел в области биомеханики. Он моделировал походку человека. Для вывода уравнений движения Фишер использовал уравнения Лагранжа. Трудоемкость вывода уравнений была очень высока, а их запись в явной форме слишком громоздка, поэтому в отсутствие вычислительной техники реальное применение подхода ограничивалось простыми случаями. Во второй половине 20-го столетия биомеханика получила сильную поддержку в связи с исследованиями тренировок спортсменов. К тому времени были разработаны более эффективные подходы к моделированию, возможность применения которых обусловило наличие ЭВМ. Например, в 1970 году Вукобратович в работе [93] обсуждал устойчивость походки человека.

В области теории механизмов и машин исследования проводилось с использованием графических методов. Однако их применение ограничивалось плоскими схемами.

Более подробные сведения из истории механики изложены в работах Шилена [79], Паслера [72].

Трудности, связанные с нелинейностью больших поворотов и гироскопической связи в уравнениях движения вместе с очень неэффективными численными методами решения дифференциальных уравнений, налагали серьезные ограничения на сложность моделей до 60-х годов прошлого столетия. Даже более поздние исследования динамики железнодорожных экипажей проводились на основе плоских расчетных схем, независимо для продольных, вертикальных и поперечных колебаний [3, 21]. Это означает пренебрежение их взаимным влиянием, что может быть некорректно при движении в кривых.

Потребности в более сложных моделях для разных областей науки и техники, а также быстрое развитие ЭВМ, появившихся в 1950-х годах, стимулировали дальнейшее развитие методов механики. В 1955 году Денавит и Хартенберг разработали матричный аппарат пространственной кинематики твердых тел [47], который в 1965 году Уикер впервые применил к динамике [92]. Эти работы можно рассматривать как отправную точку развития вычислительной механики. В то же время предпринимаются первые попытки применить вычислительные машины для синтеза уравнений движения системы тел. Оказалось, что непосредственный перенос алгоритмов ручного вывода на ЭВМ – идея не слишком удачная. Вычисления частных производных и производных по времени на ЭВМ весьма трудная задача, а промежуточные выражения настолько громоздки, что для некоторых задач недостаточно ресурсов самых современных компьютеров. Потребность в эффективных алгоритмах вывода уравнений побудила к развитию и переработке методов классической механики с ориентацией на использование ЭВМ. Первыми в этой области стали работы Роберсона и Виттенбурга [77], Вукобратовича [93], Шилена и Кройцера [81]. В этих работах представлен так называемый *прямой метод* формирования системы уравнений движения, замечательной особенностью которого является применение рекуррентных соотношений, использующих только алгебраические матричные операции умножения и сложения. Прямой метод получил развитие в работах Физерстоуна [54], Верещагина [1], Айхбергера [53], Погорелова [14], результатами которых являются различные модификации более эффективных методов *составных тел* и *отдельных тел*. Развитие в этой области знаний не всегда было поступательным. В работе Швертассека и Рулки [82] содержатся некоторые сведения об истории появления метода отдельных тел. Он был впервые сформулирован Верещагиным в 1974 году, однако должного внимания к себе в то время не привлек. Только в начале 1990-х годов после повторения формулировки различными авторами метод был впервые реализован Айхбергером. В работах Погорелова [15, 28] рассмотрен *метод подсистем*. По сути, это метод более высокого уровня, представляющий механическую систему *под-*

системами, каждая из которых является системой связанных тел. Он позволяет повысить эффективность процедуры синтеза уравнений и получить оптимальные по быстрдействию результирующие выражения. Причины возникновения, основные понятия и соотношения метода представлены в параграфе 2.1.

Уравнения движения могут быть синтезированы в *численной* или *символьной* форме. Основным преимуществом символьной формы является возможность оптимизации выражений с целью сокращения необходимого числа операций на стадии интегрирования. Однако при таком подходе затруднен анализ моделей, структура которых может меняться в процессе моделирования. Кроме того, применение для символьного синтеза уравнений *специализированных систем компьютерной алгебры* предполагает, как правило, использование внешнего компилятора одного и языков программирования высокого уровня: Паскаль, Фортран, Си и др. Основоположниками алгоритмов символьного синтеза уравнений движения являются Левинсон [65], Шилен и Кройцер [81]. Некоторые ключевые моменты рассмотрены в работе Погорелова [32]. В программном комплексе УМ реализован вывод уравнений движения как в символьной, так и в численной формах.

Анализ математических моделей практически невозможен без эффективных методов интегрирования систем дифференциально-алгебраических уравнений. Их разработке и анализу посвящены работы [39, 56, 64, 71, 75].

Зародившись в середине 1960-х годов, динамика систем тел, ориентированная на применение ЭВМ, оформилась как отдельная ветвь механики в начале 1970-х годов. Появился термин *вычислительная механика*. Технологии построения моделей механических систем, включая синтез уравнений движения, получили название *формализм*. Один из первых формализмов был представлен Хукером и Маргулисом [59] в 1965 году. Среди первых были также работы Робертсона и Виттенбурга 1967 года [77] и Вукобратовича 1970 года [93]. Систематическое изложение формализма было впервые представлено в монографии Виттенбурга в 1977 году (русский перевод 1980 [5]).

В настоящее время моделирование динамики систем тел бурно развивается, стимулированное потребностями в области космических исследований и авиационного транспорта, робототехники с одной стороны и прогрессом ЭВМ – с другой. Современная вычислительная механика является плодом совместных усилий таких дисциплин как динамика, проектирование систем управления, теория графов, вычислительная математика, информатика, оптимизация и других.

Современные требования к программам моделирования механических систем включают возможность быстрого построения и анализа адекватной модели конструкции, эффективное использование ресурсов компьютера, визуализацию объекта исследования, удобное представление результатов и другие. Обзор программ моделирования 1990-х годов представлен в [78].

Основной тенденцией развития программного обеспечения являются попытки объединить пакеты в рамках комплексного подхода к исследованию новых образцов техники на стадии проектирования и оптимизации их параметров. С этой целью развиваются пре- и постпроцессоры данных, интерфейсы с САД системами, инструменты анализа сигналов, анимация и др. Предпринимаются попытки разработать международный стандарт данных для программ моделирования. Первой попыткой в этой области была работа Dütt и др. [52], в которой предложено описание основных классов данных, принципов построения моделей и допущений при их описании.

1.1.2. Основные соотношения кинематики и динамики систем твердых тел

В настоящем параграфе представлены основные моменты методики построения твердотельных моделей механических систем, реализованной в УМ. Подробно она изложена в [28].

1.1.2.1. Основные понятия

Рассмотрим движение механической системы относительно выбранной инерциальной системы координат, которую назовем *базовой* и обозначим *СК0*.

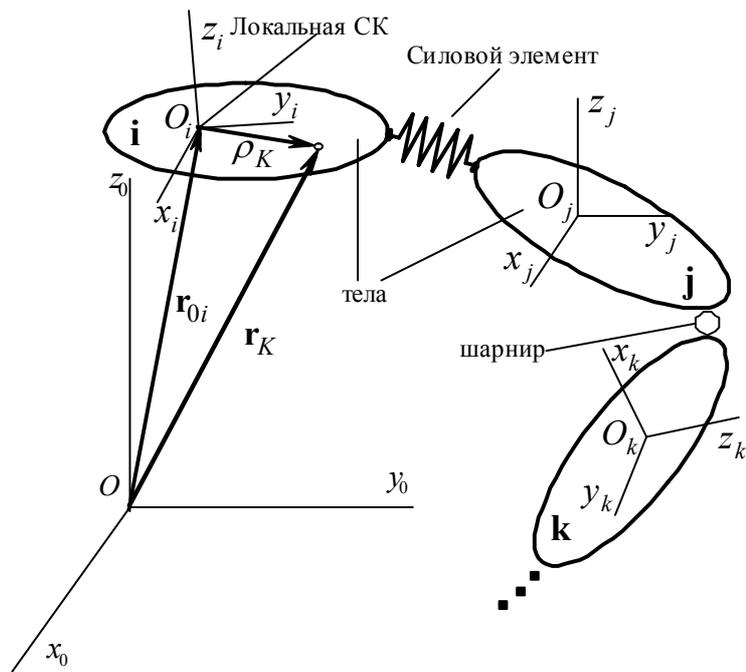


Рис. 1.1. Система связанных абсолютно твердых тел

Положение i -го тела механической системы относительно СК0 однозначно определяется системой координат СК i , жестко связанной с телом. Начало отсчета СК i может выбираться произвольно. Обозначим его O_i и назовем *полюсом*. Для единообразия СК0 поставим в соответствие фиктивное *базовое тело 0* (рис.1.1).

Ориентация СК i относительно СК0 определяется матрицей *поворота (направляющих косинусов)* \mathbf{A}_{0i} размером 3×3 . Она может быть задана последовательностью трех элементарных поворотов, посредством которых СК0 совмещается с СК i , если начала отсчета обеих СК совпадают. Для удобства вместо обозначения осей x, y, z будем использовать $1, 2, 3$. Тогда \mathbf{A}_{0i} определяется выбором последовательности осей поворотов $a_1, a_2, a_3, a_k \in [1, 2, 3], a_k \neq a_{k+1}$ и значением углов $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}$, называемых *углами ориентации*. Комбинируя номера осей поворотов, можно выбрать 12 корректных вариантов задания матрицы \mathbf{A}_{0i} . Наиболее распространенными среди них являются углы Эйлера (3-1-3) и углы Крылова (Кардано) (1-2-3).

Приведем некоторые соотношения, отражающие свойства матриц поворота, которые будут использоваться далее:

- преобразование матричных представлений векторов при переходе от СК j к СК i :

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}^{(j)},$$

где \mathbf{x} – любой вектор в трехмерном пространстве, верхний индекс в скобках здесь и далее означает систему координат, в которой представлен вектор;

- матрица поворота при переходе от СК i к СК j равна транспонированной матрице обратного перехода, т.е. $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}^T$;
- при переходе от СК i к СК k в цепочке тел i, j, k матрица поворота может быть вычислена как результат матричного произведения $\mathbf{A}_{ik} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{jk}$.

Таким образом, положение i -го тела относительно СК0 задается радиус-вектором начала отсчета СК i \mathbf{r}_{0i} (рис. 1.1) и матрицей поворота \mathbf{A}_{0i} . Аналогично определяется положение i -го тела относительно любой СК j .

Для описания кинематики механической системы вводится понятие *шарнир*, который в общем случае трактуется как способ описания относительного движения некоторого тела j системы относительно тела i . Далее будем говорить, что шарнир *соединяет* или *связывает* пару тел i и j , одним из которых может быть базовое тело 0. Каждому шарниру соответствует набор локальных шарнирных координат \mathbf{q}_{ij} . Размер вектора \mathbf{q}_{ij} зависит от типа шарнира и равен минимальному числу координат, необходимых для описания конкретного типа связи. Модели механических систем могут быть построены с использованием шарниров двух типов: *нормального* и *контактного*.

Шарнир нормального типа, соединяющий тела i, j , может быть представлен как последовательность элементарных преобразований (сдвигов или поворотов), посредством которых осуществляется переход от СК i к СК j при любом относительном положении пары тел, допускаемом данным шарниром.

С помощью шарниров контактного типа моделируется относительное движение двух тел, имеющих единственную точку контакта, которая может перемещаться по их поверхностям. В общем случае относительное положение тел в контактном шарнире невозможно описать в элементарных функциях.

Структура механической системы описывается в терминах теории графов [37]. Вершины графа соответствуют телам системы, а ребра – шарнирам. Рассматриваются только связные графы. При отсутствии такого свойства вводятся фиктивные шарниры, которые не ограничивают относительного движения связываемых ими тел.

По своей структуре механические системы делятся на два класса в соответствии с наличием в их составе *замкнутых кинематических цепей*. Системы, не содержащие замкнутых цепей, имеют *структуру дерева*, соответствующий им граф является *деревом*. Системам с замкнутыми кинематическими цепями соответствуют графы с *циклами*. Существует принципиальная разница в описании кинематики систем указанных структур.

Перенумеруем тела и шарниры механической системы в произвольном порядке. Объединим все локальные шарнирные координаты в один вектор-столбец $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{ij}]$, расположив их в порядке нумерации шарниров. Шарнирные координаты \mathbf{q} механической системы со структурой дерева являются обобщенными координатами, то есть они независимы и однозначно определяют кинематические характеристики системы. В случае систем с замкнутыми кинематическими цепями набор координат \mathbf{q} избыточен, что приводит к необходимости добавления уравнений связей.

Далее рассмотрим последовательно оба класса механических систем. Поскольку в качестве обобщенных координат рассматриваются шарнирные координаты, приведем соотношения локальной кинематики в шарнире, на основе которых строится описание глобальной кинематики системы.

1.1.2.2. Описание относительной кинематики пары тел, связанных шарниром

Соотношения локальной кинематики шарнира описывают движения тела j , относительно тела i .

Положение СК j относительно СК i задается радиус-вектором начала отсчета \mathbf{r}_{ij} и матрицей поворота \mathbf{A}_{ij} :

$$\mathbf{r}_{ij}^{(i)} = \mathbf{r}_{ij}^{(i)}(\mathbf{q}_{ij}, t), \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, t). \quad (1.1)$$

Конкретный вид выражений (1.1) определяется типом шарнира.

Соотношение для относительной линейной скорости получим дифференцированием первого из соотношений (1.1) по времени:

$$\mathbf{v}_{ij}^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} = \sum_m \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}^{(i)}}{\partial q_{ij,m}} \dot{q}_{ij,m} + \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}^{(i)}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{v}_{ij} – скорость начала отсчета СК j относительно СК i , суммирование распространяется по всем координатам в шарнире.

Обозначив $\mathbf{d}_{ij,m}^{(i)} = \partial \mathbf{r}_{ij}^{(i)} / \partial q_{ij,m}$, $\mathbf{v}'_{ij}{}^{(i)} = \partial \mathbf{r}_{ij}^{(i)} / \partial t$ и расположив $\mathbf{d}_{ij,m}$ по столбцам матрицы \mathbf{D}_{ij} , выражению (1.2) можно придать следующий вид:

$$\mathbf{v}_{ij}^{(i)} = \mathbf{D}_{ij}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_{ij} + \mathbf{v}'_{ij}{}^{(i)}. \quad (1.3)$$

Заметим, что \mathbf{D}_{ij} является матрицей Якоби.

Выражение для относительной угловой скорости получим, рассмотрев соотношения для скорости произвольной точки K тела j , положение которой задается вектором $\boldsymbol{\rho}_K$, постоянным в системе координат j . Тогда в СК i положение точки K задается следующим соотношением:

$$\mathbf{r}_k^{(i)} = \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{A}_{ij} \boldsymbol{\rho}_k^{(j)}. \quad (1.4)$$

Дифференцируя выражение (1.4) по времени, получим скорость точки K в СК i :

$$\mathbf{v}_k^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_k^{(i)} = \mathbf{v}_{ij} + \dot{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{A}_{ji} \boldsymbol{\rho}_k^{(j)}. \quad (1.5)$$

Кососимметрическая матрица $\dot{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{A}_{ji}$, появившаяся в соотношении (1.5) в результате этой операции, определяет угловую скорость тела j относительно тела i .

Введем обозначение $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}^i = \dot{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{A}_{ji}$. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ строится по кососимметрической матрице $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}$ в соответствии с правилом:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

где нижние индексы опущены для удобства записи.

Заметим, что $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}^{(i)} \boldsymbol{\rho}_k^{(i)}$ определяет векторное произведение $\boldsymbol{\omega}_{ij} \times \boldsymbol{\rho}_k$. Это правило распространяется на любые векторы в трехмерном пространстве.

Запишем выражение угловой скорости в виде:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}^{(i)} = \sum_m \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial q_{ij,m}} \mathbf{A}_{ji} \dot{q}_{ij,m} + \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial t} \mathbf{A}_{ji},$$

где матрицы $\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial q_{ij,m}} \mathbf{A}_{ji}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial t} \mathbf{A}_{ji}$ кососимметрические. Введя для них обозначения $\tilde{\mathbf{b}}_{ij,m}^{(i)}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}^{\prime(i)}$ соответственно и переходя к векторам, соотношение для относительной угловой скорости в СК i перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}_{ij}^{(i)} = \mathbf{B}_{ij}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_{ij} + \boldsymbol{\omega}_{ij}^{\prime(i)}, \quad (1.6)$$

где по столбцам матрицы \mathbf{B}_{ij} расположены векторы-столбцы $\mathbf{b}_{ij,m}$.

Относительное ускорение полюса получим дифференцированием соотношения (1.3) по времени:

$$\mathbf{a}_{ij}^{(i)} = \dot{\mathbf{v}}_{ij}^{(i)} = \mathbf{D}_{ij}^{(i)} \ddot{\mathbf{q}}_{ij} + \dot{\mathbf{D}}_{ij}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_{ij} + \dot{\mathbf{v}}_{ij}^{\prime(i)}.$$

Введя обозначение $\mathbf{a}_{ij}^{\prime(i)} = \dot{\mathbf{D}}_{ij}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_{ij} + \dot{\mathbf{v}}_{ij}^{\prime(i)}$, перепишем выражение для \mathbf{a}_{ij} в виде:

$$\mathbf{a}_{ij}^{(i)} = \mathbf{D}_{ij}^{(i)} \ddot{\mathbf{q}}_{ij} + \mathbf{a}_{ij}^{\prime(i)}. \quad (1.7)$$

Аналогично получим соотношение для относительного углового ускорения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(i)} = \mathbf{B}_{ij}^{(i)} \ddot{\mathbf{q}}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\prime(i)}. \quad (1.8)$$

Заметим, что если выражения (1.1) не содержат время t в явном виде (склерономная связь), векторы-столбцы \mathbf{v}_{ij}' , $\boldsymbol{\omega}_{ij}'$ отсутствуют.

Далее рассмотрим эффективные способы построения выражений для кинематических характеристик систем различной структуры в зависимости от обобщенных координат, их первой и второй производных по времени.

1.1.2.3. Уравнения кинематики системы со структурой дерева

Выражения, определяющие кинематику каждого i -го тела механической сис-

темы относительно СК0, можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^{(0)} &= \mathbf{r}_i^{(0)}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{A}_{i0} = \mathbf{A}_{i0}(\mathbf{q}, t). \\ \mathbf{v}_i^{(0)} &= \mathbf{D}_i^{(0)}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}_i^{\prime(0)}, \quad \boldsymbol{\omega}_i^{(0)} = \mathbf{B}_i^{(0)}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}_i^{\prime(0)} \\ \mathbf{a}_i^{(0)} &= \mathbf{D}_i^{(0)}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_i^{\prime(0)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(0)} = \mathbf{B}_i^{(0)}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\prime(0)}.\end{aligned}$$

Они строятся рекуррентно на основе анализа графа системы с использованием соотношений (1.1, 1.3, 1.6-1.8). Здесь \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{a}_i – радиус-вектор, скорость и ускорение начала отсчета СК i соответственно; $\boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ – угловые скорость и ускорение тела.

В графе системы, имеющей структуру дерева, имеется единственный простой путь от корневой вершины, соответствующей базовому телу 0, к любой i -ой вершине, соответствующей i -ому телу. Как было отмечено выше, в этом случае \mathbf{q} является набором обобщенных координат. Рассмотрим кинематику тела с номером $k+1$. Предположим, что тела в пути от корня графа к телу $k+1$ пронумерованы последовательно 0.. k . Тогда справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{k+1}^{(0)}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{r}_k^{(0)}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{A}_{0k}\mathbf{r}_{k,k+1}^{(k)}(\mathbf{q}_{k,k+1}, t), \\ \mathbf{A}_{0,k+1}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{A}_{0,k}(\mathbf{q}, t)\mathbf{A}_{k,k+1}(\mathbf{q}_{k,k+1}, t),\end{aligned}\tag{1.9}$$

где $\mathbf{r}_{k,k+1}^{(k)}(\mathbf{q}_{k,k+1}, t)$, $\mathbf{A}_{k,k+1}(\mathbf{q}_{k,k+1}, t)$ известны из анализа локальной кинематики шарнира.

Если выполняется символьный синтез соотношений кинематики, выражения для линейных и угловых скоростей и ускорений получаются дифференцированием соотношений (1.9) по времени. При численном выводе кинематические характеристики выражаются в явной форме в зависимости от \mathbf{q} . Вид этих выражений приводится в [28].

1.1.2.4. Уравнения кинематики систем с замкнутыми цепями

Рассмотрим объект, содержащий N кинематических цепей. В графе объекта им соответствуют N независимых циклов. В этом случае \mathbf{q} не является набором обобщенных координат системы, поскольку они не могут принимать произ-

вольные значения. Эффективный подход к анализу кинематики таких объектов заключается в переходе к системе со структурой дерева путем условного разрезания части шарниров, число которых равно числу замкнутых цепей. Выбор разрезаемых шарниров неоднозначен. В программе УМ реализован подход, при котором их выбор производится из условия оптимизации выводимых уравнений движения. Представим набор координат механической системы в виде:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_b^T \quad \mathbf{q}_a^T]^T,$$

где вектор-столбец \mathbf{q}_b объединяет локальные шарнирные координаты, соответствующие шарнирам дерева системы, \mathbf{q}_a объединяет координаты, соответствующие разрезанным шарнирам. Координаты, составляющие вектор-столбец \mathbf{q}_b , называются *основными* координатами системы, а составляющие вектор-столбец \mathbf{q}_a – *вспомогательными**. Далее вывод уравнений кинематики и динамики для систем с замкнутыми цепями строится в терминах \mathbf{q}_b , поскольку положение всех тел системы однозначно определяется значением основных координат. При этом алгоритм синтеза кинематических соотношений для механических систем со структурой дерева и систем с замкнутыми цепями после разрезания соответствующих шарниров одинаков. Однако координаты \mathbf{q}_b являются избыточными (число степеней свободы меньше размерности вектора-столбца). Они удовлетворяют нелинейным *уравнениям связей*:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_b, t) = 0, \quad \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{g}' = 0, \quad \mathbf{G}\ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{g}'' = 0, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{G} = \partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{q}^T$ – матрица Якоби. Если в системе отсутствуют реономные связи, вектор-столбец \mathbf{g}' отсутствует.

Вывод уравнений связей в форме (1.10) часто бывает затруднительным. Удобнее вывести уравнения, в которые входят как основные, так и вспомогательные координаты:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_a, t) = 0, \quad (1.11.1)$$

* значения индексов в обозначении векторов-столбцов координат соответствуют первым буквам англоязычных терминов *basic* (основной) и *auxiliary* (вспомогательный)

$$\mathbf{H}_b \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{H}_a \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{h}' = 0, \quad (1.11.2)$$

$$\mathbf{H}_b \ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{H}_a \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{h}'' = 0. \quad (1.11.3)$$

Вычисление вспомогательных координат во многих случаях полезно, а иногда просто необходимо, например, когда от их значения зависят активные силы, действующие на систему.

Заметим, что уравнения (1.10,1.11) представляют собой *голономные* связи механической системы. Для *неголономных* связей алгебраическая часть уравнений отсутствует, а дифференциальным уравнениям связей в большинстве случаев можно придать форму (1.11.2, 1.11.3). Неголономные связи соответствуют, как правило, качению тел без проскальзывания и редко используются для моделирования технических задач. В настоящем обзоре они не рассматриваются.

Исключив из уравнений (1.11) вспомогательные координаты, получим уравнения связей в стандартной форме (1.10). Для этого разделим уравнение (1.11.1) на две части:

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_a, t) = 0, \quad \mathbf{h}_2(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_a, t) = 0$$

так, чтобы матрица Якоби $\partial \mathbf{h}_2 / \partial \mathbf{q}_a^T$ была квадратной и невырожденной. Тогда, используя второе из полученных уравнений, вспомогательные координаты могут быть выражены через основные:

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a(\mathbf{q}_b, t).$$

Подставив это соотношение в первое уравнение, получим:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_b, t) = \mathbf{h}_1(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_a(\mathbf{q}_b, t), t) = 0.$$

Аналогично исключаются производные по времени от вспомогательных координат из уравнений (1.11.2, 1.11.3).

Стоит отметить, что формирование уравнений связей, а также исключение вспомогательных переменных выполняется для каждого разрезаемого шарнира *независимо* (локально), чем достигается высокая эффективность этих процедур.

1.1.2.5. Динамика системы твердых тел

Рассмотрим синтез уравнений движения системы абсолютно твердых тел с идеальными голономными связями. Эффективная процедура вывода уравнений, реализованная в УМ, построена на основе общих уравнений динамики с использованием теоремы о движении центра масс и динамических уравнений Эйлера, записанных для каждого тела.

Условно разрежем все шарниры, заменив их соответствующими силами реакций. Предположив, что начала отсчета всех СК i , связанных с телами, расположены в центрах масс, запишем для каждого тела системы:

$$m_i \mathbf{a}_i^{(0)} = \mathbf{f}_i^{e(0)} + \mathbf{f}_i^{r(0)}, \quad (1.12.1)$$

$$\mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{I}_i^{e(i)} + \mathbf{I}_i^{r(i)}, \quad (1.12.2)$$

где нижний индекс означает номер тела, m_i - масса тела, \mathbf{J}_i – матрица тензора инерции, $\mathbf{f}_i^e, \mathbf{I}_i^e, \mathbf{f}_i^r, \mathbf{I}_i^r$ – главные векторы и главные моменты относительно центра масс активных сил и сил реакций связей соответственно. Уравнения (1.12.1, 1.12.2) представлены в разных системах координат с целью уменьшения числа операций при выводе.

Математическая запись условия идеальности связей имеет следующий вид:

$$\sum (\delta \mathbf{r}_i^{(0)T} \mathbf{f}_i^{r(0)} + \delta \boldsymbol{\pi}_i^{(i)T} \mathbf{I}_i^{r(i)}) = 0 \quad (1.13)$$

и означает равенство нулю суммы работ сил реакций на возможных перемещениях системы. Здесь $\delta \mathbf{r}_i^{(0)}$, $\delta \boldsymbol{\pi}_i^{(i)}$ – векторы перемещения центра масс и поворота тела i при возможном перемещении системы. Выразим их через вариации координаты системы:

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{D}_i \delta \mathbf{q}, \quad \delta \boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{q}. \quad (1.14)$$

Тогда, подставляя в уравнение (1.13) значения $\mathbf{f}_i^r, \mathbf{I}_i^r$, выраженные из уравнений (1.12.1, 1.12.2), с учетом соотношений (1.14) получим уравнения движения механической системы в следующем виде:

$$\delta \mathbf{q}^T \sum (\mathbf{D}_i^{(0)T} (m_i \mathbf{a}_i^{(0)} - \mathbf{f}_i^{e(0)}) + \mathbf{B}_i^{(i)T} (\mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} - \mathbf{I}_i^{e(i)})) = 0. \quad (1.15)$$

Дальнейшие преобразования уравнения (1.15) зависят от структуры механической системы.

Уравнения движения систем тел со структурой дерева

При анализе кинематики было отмечено, что если механическая система имеет структуру дерева, \mathbf{q} представляет собой набор обобщенных координат. Поскольку вариации обобщенных координат независимы, справедливо следующее уравнение:

$$\sum (\mathbf{D}_i^{(0)T} (m_i \mathbf{a}_i^{(0)} - \mathbf{f}_i^{e(0)}) + \mathbf{B}_i^{(i)T} (\mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} - \mathbf{l}_i^{e(i)})) = 0. \quad (1.16)$$

Используя соотношения (1.7, 1.8), введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum \mathbf{M}_i = \sum (m_i \mathbf{D}_i^{(0)T} \mathbf{D}_i^{(0)} + \mathbf{B}_i^{(i)T} \mathbf{J}_i^{(i)} \mathbf{B}_i^{(i)}), \\ \mathbf{k} &= \sum \mathbf{k}_i = \sum (m_i \mathbf{D}_i^{(0)T} \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{B}_i^{(i)T} (\mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)}), \\ \mathbf{f} &= \sum \mathbf{f}_i = \sum (\mathbf{D}_i^{(0)T} \mathbf{f}_i^{e(0)} + \mathbf{B}_i^{(i)T} \mathbf{l}_i^{e(i)}), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где \mathbf{M} – матрица масс системы, \mathbf{k} , \mathbf{f} – векторы-столбцы обобщенных сил инерции и обобщенных активных сил. Тогда уравнению (1.16) можно придать более компактный вид:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} = \mathbf{f}. \quad (1.18)$$

Следует обратить внимание на два важных момента, благодаря которым вывод уравнений становится очень эффективным.

Во-первых, описанный алгоритм синтеза уравнений содержит только алгебраические операции, что позволяет использовать приведенные соотношения как для численного, так и для символьного вывода.

Во-вторых, процедура вычисления \mathbf{M} , \mathbf{k} , \mathbf{f} включает *независимые* расчеты соответствующих величин \mathbf{M}_i , \mathbf{k}_i , \mathbf{f}_i для каждого тела системы и последующее суммирование этих величин.

Уравнения движения систем с замкнутыми кинематическими цепями.

В соответствие с подходом, описанным при анализе кинематики, перейдем к системе со структурой дерева, разрезав соответствующие шарниры. Тогда

обобщенные силы от сил реакций в разрезанных шарнирах войдут в столбец обобщенных сил \mathbf{f} . Уравнения движения систем с замкнутыми кинематическими цепями строятся в терминах основных шарнирных координат \mathbf{q}_b , которые являются избыточными и вместе с производными по времени первого и второго порядка удовлетворяют уравнениям связей (1.10). Тогда для вариации координат справедливо соотношение

$$\mathbf{G}\delta\mathbf{q}_b = 0.$$

С учетом этого можно доказать, что уравнение (1.15) удовлетворяется, если выполняется следующее соотношение:

$$\sum (\mathbf{D}_i^{(0)T} (m_i \mathbf{a}_i^{(0)} - \mathbf{f}_i^{e(0)}) + \mathbf{B}_i^{(i)T} (\mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} - \mathbf{l}_i^{e(i)})) = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (1.19)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор-столбец *множителей Лагранжа*, размерность которого соответствует числу уравнений связей. Множители Лагранжа определяют силы реакций в разрезанных шарнирах. Явный вид этой зависимости определяется типом шарнира.

Уравнения (1.19) совместно с (1.10) образуют замкнутую систему уравнений движения механической системы. С учетом обозначений (1.17) ей можно придать следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{k} = \mathbf{f} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_b, t) = 0 \\ \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{g}' = 0 \\ \mathbf{G}\ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{g}'' = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Неизвестными в этих уравнениях являются координаты \mathbf{q}_b и множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$.

Как упоминалось выше, уравнения (1.20) могут быть синтезированы автоматически с применением формализмов в численной или символьной форме. Численная форма уравнений предполагает их вывод на каждом шаге интегрирования. Уравнения в символьной форме синтезируются один раз для всего цикла исследований. Синтез повторяется только после изменения модели.

На рис. 1.2 представлены схемы исследований с применением упомянутых формализмов.

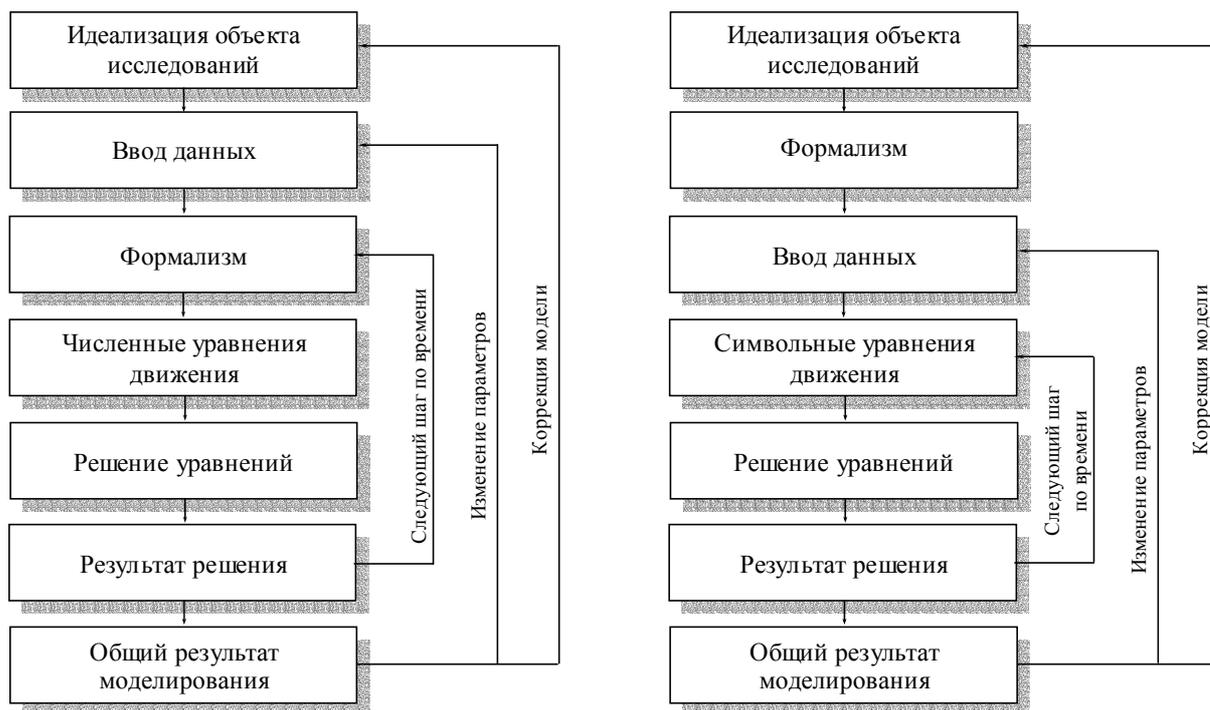


Рис.1.2. Схема применения численного и символьного формализмов для исследования модели посредством интегрирования уравнений движения

В заключение отметим весьма высокую эффективность моделирования динамики механических систем на основе их представления системой абсолютно твердых тел. Метод хорошо зарекомендовал себя в различных областях науки и техники [12, 22, 78].

§ 1.2. Обзор подходов к формированию уравнений движения упругих тел

Решение многих задач моделирования динамики механических систем с необходимой точностью возможно только при учете упругих свойств отдельных частей конструкций. Например, значения низших собственных частот кузова железнодорожного экипажа вполне сопоставимы с частотами колебаний на подвеске. Поэтому учет форм колебаний кузова, соответствующих низшим частотам, может существенно уточнить результаты анализа вибраций при движении. С другой стороны, значения низших частот железнодорожного колеса составляют 180-200 Гц, то есть весьма далеки от низших частот экипажа. Применение единого подхода для всей конструкции в такой ситуации нерационально, желательно совмещение различных подходов при построении модели. Пример подобной задачи из аэрокосмической области приводится в работе Швертассека [82], где с учетом упругости моделируется вращение антенны, присоединенной к станции. В работе Амброзио и Перейры [40] комбинированный подход применяется для исследования динамики автомобиля.

В настоящем параграфе рассмотрим основные способы описания динамики упругих тел, после чего выберем один из них в качестве базового для разработки алгоритма синтеза уравнений движения. Решающим критерием выбора является универсальность подхода, то есть возможность его применения к широкому классу задач, в частности транспортных.

Отталкиваясь в своем обзоре от системы абсолютно твердых тел, вначале рассмотрим представление упругих компонентов твердотельными моделями. Подход, называемый *методом конечных сегментов*, или *методом твердотельных элементов*, представлен в п.1.2.1.

Следующим шагом по пути развития методов моделирования динамики упругих тел является попытка совмещения подходов СТТ и МКЭ в рамках *линейной теории динамики упругих тел (ЛТДУТ)*. МКЭ появился в начале 1950-х годов и первоначально разрабатывался как метод анализа статики конструкций.

Исходным предположением классического МКЭ является предположение о малости деформаций и перемещений упругого тела, соответственно результирующие соотношения геометрически линейные. Позднее метод получил распространение на задачи динамики. Уравнения движения упругой конструкции можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$ постоянные, симметричные матрицы масс, внутреннего демпфирования и жесткости соответственно, \mathbf{f} – вектор приложенных сил. Размер системы уравнений N соответствует числу узловых степеней свободы.

В настоящее время МКЭ оформился как классическая дисциплина и мощный, широко применяемый инструмент исследования динамики, статики и напряженно-деформированного состояния конструкций. Множество разработанных типов конечных элементов позволяет моделировать тела практически любой конфигурации. Описанию основ и развитию метода посвящены многочисленные публикации, среди которых можно отметить работы Зенкевича [16], Галагера [6], Постнова [33, 35]. Метод реализован в виде программного обеспечения. Самыми известными пакетами являются ANSYS, NASTRAN, ABAQUS.

Согласно подходу на основе ЛТДУТ движение упругой конструкции представляется суммой большого движения как абсолютно твердого тела и малых упругих перемещений за счет деформаций. Причем эти составляющие рассматриваются независимо.

«Полновесное» совмещение подходов проведено в рамках *метода присоединенной системы координат (ПСК)*. Метод учитывает инерционную связь больших движений тела как абсолютно твердого и малых упругих перемещений.

Последние достижения в области моделирования динамики упругих тел связаны с *формулировкой МКЭ в терминах абсолютных координат (АК)*, позволяющей описать произвольные пространственные движения упругих тел с учетом больших упругих перемещений.

Далее рассмотрим упомянутые методы более подробно. Кроме того, остановимся на *методе последовательных приближений*, который широко применялся до появления методов ПСК и АК, и *методе вектора большого поворота*, не получившем широкого распространения.

1.2.1. Метод твердотельных элементов

В соответствии с методом твердотельных элементов упругие компоненты конструкции представляются набором твердых тел, соединенных упруго-диссипативными элементами. Основными проблемами являются выбор числа твердых тел, их расположения, а также подбор характеристик упруго-диссипативных элементов. Значения параметров могут выбираться, например, с использованием МКЭ. Другой проблемой является интегрирование жестких уравнений движения систем, включающих сотни тел.

В этой области можно отметить работы Крушевского и др. 1975 г. [63], Хьюстона и др. 1981 г. [62], Рау и Шилена 1986 г. [76], Леонтьева 1992 г. [18], Паскаль и Гагариной [70], Погорелова и др. [73, 74, 30, 9].

В большинстве работ рассматриваются балочные схемы, в том числе пространственные. Например, в работе [9] балочные элементы успешно применяются для определения положений равновесия и расчета собственных форм кабеля жесткого диска компьютера. В работе [50] подобная схема используется для исследования динамики ворсинок вращающейся щетки.

В работах [74, 30] предприняты попытки моделирования пластин на основе твердотельных элементов. В работе [74] показана сходимость для задач статики, однако в задаче расчета собственных частот и форм колебаний пластины наблюдается плохая сходимость. Эта закономерность подтверждается работой [30], где моделируется конвейер с подвесной лентой. Модель содержит 200 абсолютно твердых тел, размер системы уравнений движения равен 1000.

1.2.2. Линейная теория динамики упругих тел

Предполагается, что упругие перемещения за счет деформаций не имеют значительного влияния на движение тела как абсолютно твердого [85]. Моделирование проводится в два этапа. На первом этапе вся конструкция представляется твердотельной моделью, с использованием которой вычисляются значения сил инерции и сил реакций связей. Эти значения служат исходными данными для второго этапа – решения уравнения (1.21) для упругих компонентов, где \mathbf{f} представляется суммой сил, рассчитанных на первом этапе $\mathbf{f}^i + \mathbf{f}^r + \mathbf{f}^e$. Используются следующие обозначения: \mathbf{f}^i – инерционные силы, в том числе силы Кориолиса и центробежные силы, \mathbf{f}^r – силы реакций, \mathbf{f}^e – активные силы. Движение деформируемых тел представляется суммой (суперпозицией) больших твердотельных движений и малых упругих перемещений.

Результаты исследований с применением описанного метода приводятся, например, в работе [17].

Точность результатов, полученных методом ЛТДУТ для механических систем большого веса или высокоскоростных режимов движения, сомнительна. В указанных случаях выражения для матрицы масс и сил инерции, сформированные независимо для твердотельного движения и упругих перемещений, становятся малопригодными.

1.2.3. Метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений позволяет описать большие упругие перемещения при условии малости узловых координат. С каждым конечным элементом связывается промежуточная система координат. Относительно нее записываются уравнения кинематики конечного элемента. Предполагается, что в процессе моделирования любые два последовательных положения элемента могут быть описаны малыми относительными углами поворотов. Для этого, следовательно, возможно использовать малые вращательные узловые координаты. Промежуточная система координат «накапливает» последовательность

поворотов, ее положение относительно глобальной СК задает положение конечного элемента.

Варианты численных процедур, реализующих описанный подход, представлены в работах [55, 60].

Классическим примером использования метода последовательных приближений является часто цитируемая задача деформирования консольного стержня под воздействием момента, приложенного на свободном конце [44, 85].

Этот метод плохо моделирует твердотельную динамику при вращении тел. К тому же он не приводит к нулевым напряжениям при произвольном движении тел как абсолютно твердых. Для устранения этих недостатков используется ряд приемов, которые, как правило, сводятся к введению дополнительных систем координат [85].

1.2.4. Векторы больших поворотов

Предлагается подход, при котором вращательные координаты в узлах позволяют описывать большие повороты сечений конечного элемента. Интерполяционные функции форм строятся обычным образом. То есть используется процедура классического МКЭ без линеаризации по углам поворота [89, 90].

Применение подхода к некоторым типам конечных элементов, например, к балкам Эйлера-Бернули, приводят к избыточности координат и вырождениям [83]. Вследствие этого, а также по причине появления более прогрессивного метода формулировки МКЭ в абсолютных координатах представляемый подход не получил широкого распространения.

1.2.5. Метод присоединенной системы координат

Реализация метода является естественной попыткой распространить кинематическое соотношение (1.4) на упругие тела. Пространственное движение упругого тела представляется посредством связанной с ним системы координат 1, относительно которой строятся соотношения для упругих перемещений. Положение произвольной k -ой точки деформируемого тела в глобальной СК опреде-

ляется следующим соотношением (рис 1.3):

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \mathbf{d}_k^{(1)}). \quad (1.22)$$

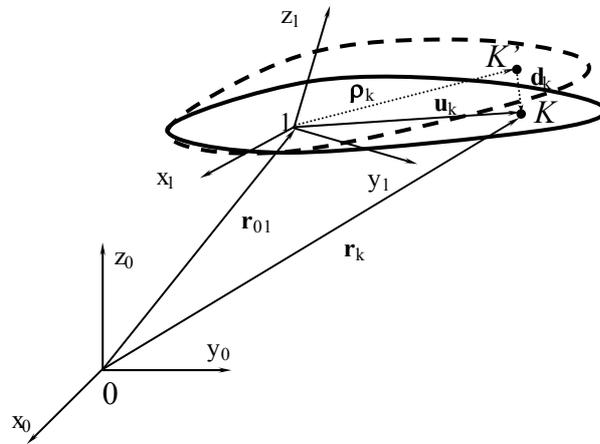


Рис 1.3. Метод присоединенной системы координат

Вектор \mathbf{d} представляет перемещения за счет упругих деформаций тела. Соотношение (1.22), вообще говоря, не налагает никаких ограничений на их величину. Деформации и соответствующие перемещения могут быть описаны любым корректным способом. Однако описываемый подход получил широкое распространение при условии малости упругих перемещений, то есть в СК1 конструкция может быть представлена линейным МКЭ.

Используя любой известный способ построения уравнений движения, например, уравнения Лагранжа II рода или общее уравнение динамики, уравнения движения упругого тела можно записать в виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\mathbf{q} + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_c, \quad (1.23)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{D} – матрицы масс, упругости и внутреннего демпфирования упругого тела, \mathbf{q} – обобщенные координаты, \mathbf{k} – вектор-столбец обобщенных сил инерции, \mathbf{f}_a – вектор-столбец обобщенных сил от приложенных нагрузок, \mathbf{f}_c – вектор-столбец обобщенных сил реакций. Число обобщенных координат равно $6+N$; 6 координат задают положение СК1 в пространстве, N узловых координат используются для описания малых упругих перемещений в СК1. Уравнения, построенные методом ПСК, содержат нелинейные матрицу масс и вектор сил инерции как результат инерционной связи между большим твердотельным

движением и малыми упругими перемещениями. Матрица жесткости, с другой стороны, не отличается от матрицы, построенной линейным МКЭ, благодаря факту, что упругие координаты определяются в СК тела.

Число узловых координат конечно-элементной модели для многих конструкций может равняться десяткам и сотнями тысяч. Этот факт, а также наличие высокочастотных составляющих в решении делают непосредственный анализ системы уравнений (1.23) путем интегрирования неэффективным. Ее размер можно уменьшить на несколько порядков, используя модальный анализ [86]. Общий вид уравнений, записанных в терминах модальных координат, совпадает с (1.23), однако вместо N узловых координат упругие свойства представляют H новых координат, соответствующих допустимым формам упругого тела, $H \ll N$.

Описанный подход позволяет использовать в качестве препроцессора программы МКЭ. Далее в параграфах 2.2 и 2.3 об этом будет сказано подробнее.

Подход на основе ПСК рассмотрен в работах [68, 88, 84]. Важным вопросом является оптимальный выбор локальной системы координат. Вообще говоря, никаких принципиальных ограничений кроме запрета на твердотельные перемещения тела в СК1 не налагается. Эти условия легко удовлетворяются, например, жестким закреплением одного узла. Однако результаты более глубоких исследований [68] показывают, что удачным выбором локальной СК можно минимизировать инерционную связь между твердотельным движением и упругими перемещениями. Один из подходов заключается в расчете положения главных осей инерции деформируемого тела на основе анализа матрицы масс.

Метод присоединенной СК широко используется для моделирования динамики упругих тел с малыми относительными перемещениями. Он свободен от недостатков, упомянутых при описании метода последовательных приближений и ЛТДУТ, в частности, правильно моделируется динамика тела при отсутствии деформаций. Особенно привлекательна возможность использования линейного МКЭ и программ, разработанных на его основе.

1.2.6. Формулировка МКЭ в терминах абсолютных координат

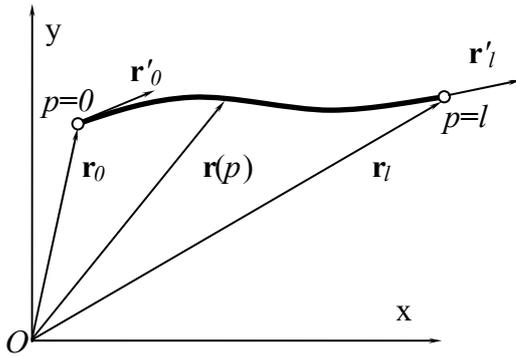


Рис. 1.4. Формулировка МКЭ в терминах абсолютных координатах

Формулировка МКЭ в терминах абсолютных координат развивает классический МКЭ для получения возможности моделирования произвольного пространственного движения упругих тел совместно с их большими упругими перемещениями. Набор узловых координат включает глобальные

координаты узлов, а также наклоны, имеющие смысл касательных векторов либо к осевой линии балки, либо к поверхности пластины. Функции форм конечного элемента записываются непосредственно в глобальной системе координат. Рассмотрим балочный элемент представленный на рис.1.4. Используя интерполяционные полиномы Эрмита, представим срединную линию балки в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(p) &= s_1(p)x_0 + s_2(p)x'_0 + s_3(p)x_\ell + s_4(p)x'_\ell, \\ y(p) &= s_1(p)y_0 + s_2(p)y'_0 + s_3(p)y_\ell + s_4(p)y'_\ell, \end{aligned}$$

где $p \in [0, \ell]$, $s_1..s_4$ – полиномы Эрмита:

$$\begin{aligned} s_1(p) &= s_3(\ell - p) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, & s_3(p) &= 3\eta^2 - 2\eta^3, \\ s_2(p) &= -s_4(\ell - p) = \ell(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), & s_4(p) &= \ell(\eta^3 - \eta^2), \end{aligned} \quad \eta = \frac{p}{\ell}.$$

Тогда набор узловых координат балочного элемента выбирается в следующем виде:

$$\mathbf{q} = [x_0 \quad y_0 \quad x'_0 \quad y'_0 \quad x_\ell \quad y_\ell \quad x'_\ell \quad y'_\ell]^T,$$

где $x' = dx/dp$ и $y' = dy/dp$ пропорциональны косинусам углов наклона срединной линии к осям координат и поэтому являются компонентами вектора, касательного к ней. Отметим, что условия малости на значения элементов вектора столбца \mathbf{q} не налагаются. Кроме того, длина касательных векторов может отличаться от единичной, что отражает продольную деформацию балки. Важным условием, которому должны удовлетворять функции формы, является возможность корректно моделировать твердотельное движение элемента.

Замечательным результатом применения подхода являются уравнения движения с постоянной матрицей масс и отсутствием вектора сил инерции. Наиболее «тяжелой» операцией является вычисление нелинейных обобщенных сил упругости, выражения для которых весьма громоздки.

Формулировка в терминах абсолютных координат – наиболее современный подход в моделировании упругих тел. основополагающая статья Шабаны [83] появилась в 1996 году. Совместно с учениками и коллегами он реализовал подход для плоских и пространственных балочных элементов [43, 44, 69, 87], а также для элемента пластины [67]. В настоящее время метод интенсивно развивается. Пожалуй, можно сказать, что еще не пройдена стадия становления. Среди недавних публикаций в этой области можно отметить работы Дмитроченко и др. [8, 11, 94, 95, 96, 97, 51, 49], в которых предложены новые типы конечных элементов пластины. Отмечена очень хорошая согласованность результатов моделирования с экспериментом.

§ 1.3. Выводы и задачи исследований

Базовым подходом для компьютерного моделирования динамики механических систем является представление их системой абсолютно твердых тел, связанных посредством шарниров и силовых элементов. На его основе разработаны эффективные алгоритмы вывода уравнений движения в численной или символьной форме, а также численные методы их анализа. Данный подход хорошо зарекомендовал себя при решении широкого класса задач. Однако многие исследования предполагают учет упругости некоторых частей конструкции. С этой целью разрабатывались методы, позволяющие дополнить модель упругими телами.

Обзор существующих подходов к описанию динамики упругих тел показал, что методы ПСК и АК являются наиболее универсальными и могут рассматриваться в качестве основы для построения методики исследования гибридных моделей. По сути, это означает выбор одного из двух классов задач моделирования.

Метод АК ориентирован на конструкции с большими упругими перемещениями, каковыми, например, являются ленточные конвейеры. В настоящее время метод проходит стадию становления, когда разработка нового типа конечных элементов составляет отдельный предмет научных исследований. Трех- и четырехугольные элементы пластины представлены совсем недавно. Объемные элементы в постановке АК отсутствуют.

С другой стороны метод ПСК позволяет моделировать пространственные движения упругих тел с малыми упругими перемещениями. Он может использоваться для решения многих задач, имеющих важное прикладное значение, например, исследования вибраций железнодорожных экипажей или автомобилей. Метод ПСК может использовать результаты применения линейного МКЭ, теоретические основы которого хорошо разработаны: известные типы конечных элементов позволяют исследовать тела практически любой конфигурации.

В настоящей работе будем ориентироваться на решение задач второго типа, то есть метод ПСК принимается за основу для представления упругих тел в составе гибридной модели. Стоит отметить, что, несмотря на распространенность подхода, автору не известны работы, в которых приводятся конечные выражения всех членов уравнения (1.23).

Повышение эффективности моделирования с использованием метода ПСК связано с формированием уравнений (1.23) в терминах модальных координат. Такой подход предполагает применение к упругим телам методов модального анализа, что, в свою очередь, требует решения обобщенной проблемы собственных значений. Эта задача становится нетривиальной, если размер матричных уравнений составляет десятки и сотни тысяч.

На основании вышеизложенного разработка методики построения и анализа гибридных моделей предполагает решение следующих задач.

1. Разработка алгоритма численного синтеза уравнений движения упругих тел с учетом их больших движений и малых упругих перемещений за счет деформаций.

2. Выбор и модификация методов понижения порядка систем уравнений движения упругих тел на основе анализа существующих подходов.

3. Выбор и модификация эффективных алгоритмов решения обобщенной проблемы собственных значений для матричных пучков большого размера на основе анализа существующих методов.

4. Описание взаимодействий между твердыми и упругими телами в составе гибридной модели посредством произвольных силовых элементов и шарниров.

5. Реализация методики в виде модуля к программному комплексу «Универсальный механизм».

6. Оценка эффективности разработанной методики моделирования по результатам ее применения к исследованиям динамики механических систем. Для решения этой задачи разработаны гибридные модели автотрисы АС4 и щебнеочистительного модуля ЩОМ 1200 (включая разработку конечно-элементной схемы на основе конструкторской документации). Результаты исследований приводятся в главе 3.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ ГИБРИДНЫХ МОДЕЛЕЙ

Один из основных итогов первой главы – общий вид уравнений движения системы тел (1.20). Понятно, что уравнения (1.23), полученные методом ПСК, можно рассматривать как частный случай соотношений (1.20), поэтому в целом ясна перспектива объединения упругих и абсолютно твердых тел, взаимодействующих в составе гибридной модели. Подходящей основой для этого является упомянутый в параграфе 1.1 *метод подсистем*, разработанный профессором Погореловым для систем абсолютно твердых тел. Под его руководством автор обобщил подход на гибридные модели.

Вывод соотношений, определяющих явный вид членов уравнения (1.23), и математическое описание способов взаимодействия абсолютно твердых и упругих тел можно провести независимо. Поэтому последовательность изложения, вообще говоря, неважна. Однако мы начнем с общего описания метода подсистем, чтобы придерживаться введенной при этом терминологии в дальнейшем изложении.

§ 2.1. Метод подсистем – основа построения гибридных моделей

Метод подсистем для абсолютно твердых тел разработан профессором Погореловым Д.Ю. и впервые реализован в MS-DOS версии программы «Универсальный механизм». Первыми публикациями с описанием теоретических основ метода являются, по-видимому, работы [13,15]. Он разрабатывался для преодоления двух основных трудностей, возникающих при моделировании механических систем с длинными кинематическими цепями.

Первая трудность была связана с ограничениями, налагаемыми операционной системой MS-DOS персонального компьютера и компилятором Turbo Pascal на размер файлов, подготовленных для трансляции. Уравнения движения

для объекта, имеющего длину кинематической цепи около 30 тел, располагались в более чем 100 файлах. Острота этой проблемы была снята с появлением версии программы для операционной системы Windows.

Второй трудностью является большой объем вычислений при решении на каждом шаге интегрирования системы линейных алгебраических уравнений, матрицей которой является матрица масс. Большое число операций также требует расчет самой матрицы масс на каждом шаге.

Метод подсистем основан на простой идее деления системы на части, называемые *подсистемами*, путем условного разрезания подходящих шарниров или силовых элементов, которые в рамках подсистемы именуется *внешними*. Объект, включающий более одной подсистемы, называется *составным*. В результате матрица масс приобретает блочно-диагональный вид, что часто позволяет значительно сократить требования к вычислительным ресурсам. Подробнее математические особенности реализации метода подсистем описаны в [28].

Кроме того, во многих случаях метод существенно сокращает трудозатраты на подготовку исходной информации о модели. Во-первых, многие механические системы содержат набор подобных конструктивных элементов. Подсистемы, которые представляют такие элементы, в терминах метода называются кинематически тождественными и требуют однократной подготовки информации. Во-вторых, нередко механические конструкции одного класса содержат одинаковые узлы и агрегаты. Например, железнодорожная тележка ЦНИИ-ХЗ используется для многих типов вагонов. Выполнив однократный ввод информации и синтез уравнений движения, подсистему можно использовать в последующем для построения моделей других экипажей. Причем параметры подсистемы можно варьировать, задав их символьными идентификаторами. Таким образом, появляется механизм поддержания конструкторской базы данных, точнее, базы данных моделей. В программной реализации каждой подсистеме соответствует динамически загружаемая библиотека – DLL.

К настоящему времени развитие получили как теоретические основы метода, так и его программная реализация, что позволяет быстро строить и анализировать эффективные модели широкого класса конструкций.

Уравнения движения отдельной подсистемы с номером i можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{k}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) + \sum_k \mathbf{f}_{ik}^e(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, t) + \sum_k \mathbf{G}_{ik}^T(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_k, t)\boldsymbol{\lambda}_{ik}$$

$$\mathbf{g}_{ik}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_k, t) = 0, k \in K(i),$$

где \mathbf{f}_i – вектор-столбец обобщенных сил, соответствующих внутренним активным силам; \mathbf{f}_{ik}^e – вектор-столбец обобщенных сил от силовых взаимодействий подсистем с номерами i и k ; \mathbf{g}_{ik} – уравнения связей в шарнирах, соединяющих подсистемы; \mathbf{G}_{ik} – матрица Якоби уравнений связей; $\boldsymbol{\lambda}_{ik}$ – вектор-столбец множителей Лагранжа, K – множество подсистем составного объекта, с которыми взаимодействует подсистема i .

Заметим, что общий вид этого уравнения совпадает с видом уравнения (1.23), что позволяет рассматривать упругое тело в качестве подсистемы и включить его в состав гибридной модели.

Уравнения движения составного объекта строятся на основе уравнений движения для отдельных подсистем. Каждое упругое тело представляется отдельной подсистемой. Для реализации взаимодействий между данной упругой подсистемой и другими подсистемами объекта посредством силовых элементов и шарниров используются стандартные внутренние процедуры УМ. Модификация метода подсистем заключается в разработке процедур расчета текущих значений кинематических характеристик упругой подсистемы, а также выражений для матриц Якоби, которые используются при построении уравнений связей.

§ 2.2. Вывод соотношений для численного синтеза уравнений движения упругих подсистем

В настоящем параграфе мы «забудем» некоторые выводы первой главы и подробнее обоснуем необходимость использования упрощающих предположений. Будем надеяться, что обсуждение этих вопросов займет немного места и благоприятно скажется на целостности изложения.

2.2.1. Основные допущения

Для вывода уравнений движения упругой подсистемы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

где T , U соответственно кинетическая и потенциальная энергия подсистемы, \mathbf{q} , \mathbf{f} – векторы-столбцы соответственно обобщенных координат подсистемы и обобщенных сил, действующих на подсистему. Индекс, указывающий на принадлежность обозначений подсистеме, для простоты опущен.

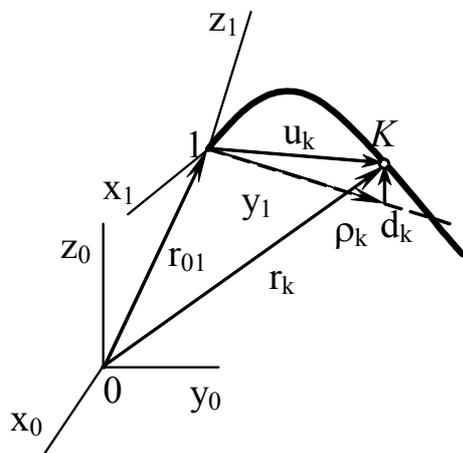


Рис 2.1. Описание положения точки упругого тела с использованием присоединенной СК

Рассмотрим синтез уравнений движения упругой подсистемы, положение точек которой описывается с использованием присоединенной системы координат (СК). В зарубежной литературе такой способ описания кинематики упругого тела получил название «*floating frame of reference*». В пределах настоящего параграфа будем считать, что упругая подсистема содержит одно тело, поэтому термины «тело» и «подсистема» равнозначны. С упругим телом связана СК1 (рис.1.3, 2.1). Положение \mathbf{r}_k

относительно глобальной СК0 любой точки K упругого тела при движении представляется суммой векторов \mathbf{r}_{01} положения СК1 относительно СК0 и \mathbf{u}_k положения точки в СК1. Ориентация СК1 относительно СК0 определяется

тремя углами ориентации $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$, в качестве которых могут быть выбраны углы Эйлера, соответствующие последовательности поворотов 3-1-3 или углы Кардано 1-2-3. Вектор \mathbf{u}_k представим суммой постоянного вектора $\boldsymbol{\rho}_k$ координат точки упругого тела в недеформированном состоянии и вектора упругого перемещения \mathbf{d}_k , то есть

$$\mathbf{r}_k^{(0)} = \mathbf{r}_{01}^{(0)} + \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \mathbf{d}_k^{(1)}), \quad (2.2)$$

где верхний индекс означает СК в которой представлены векторы, $\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\varphi})$ – матрица направляющих косинусов СК1 относительно СК0.

Дифференцируя по времени (2.2), получим соотношение для скорости точки K :

$$\dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{01}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}_{01}\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \dot{\mathbf{A}}_{01}\mathbf{d}_k^{(1)} + \mathbf{A}_{01}\dot{\mathbf{d}}_k^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}_{01}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\boldsymbol{\rho}_k^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\mathbf{d}_k^{(0)} + \dot{\mathbf{d}}_k^{(0)}. \quad (2.3)$$

Запишем выражение для кинетической энергии упругого тела в общем виде:

$$2T = \int_V \dot{\mathbf{r}}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k \mu dV, \quad (2.4)$$

где μ – плотность материала, V – объем тела,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k &= \dot{\mathbf{r}}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\mathbf{r}}_{01}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \dot{\mathbf{r}}_{01}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + \dot{\mathbf{r}}_{01}^T \dot{\mathbf{d}}_k + \boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{r}}_{01} + \boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + \\ &\boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{r}}_{01} + \mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{d}}_k + \dot{\mathbf{d}}_k^T \dot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\mathbf{d}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \\ &\dot{\mathbf{d}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + \dot{\mathbf{d}}_k^T \dot{\mathbf{d}}_k = \dot{\mathbf{r}}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}_{01} + \boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + \dot{\mathbf{d}}_k^T \dot{\mathbf{d}}_k + 2\dot{\mathbf{r}}_{01}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_k + \\ &2\dot{\mathbf{r}}_{01}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + 2\dot{\mathbf{r}}_{01}^T \dot{\mathbf{d}}_k + 2\boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_k + 2\boldsymbol{\rho}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{d}}_k + 2\mathbf{d}_k^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\mathbf{d}}_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Мы пока не будем рассматривать часть уравнений Лагранжа, соответствующую потенциальной энергии, а заметим, что вывести уравнения движения упругой подсистемы в точной постановке и решить их аналитически для подавляющего большинства объектов не представляется возможным. Поэтому вывод уравнений движения для упругих подсистем выполним с применением приближенных методов.

Приближение 1. Конечно-элементная дискретизация.

Перемещение \mathbf{d}_k k -ой точки упругого тела в СК1 представляется следующим соотношением:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k) \mathbf{x}_e, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_e – матрица функций формы, \mathbf{x}_e – вектор столбец узловых степеней свободы. Индекс e указывает на конечный элемент, которому принадлежит рассматриваемая точка.

Тогда уравнения (2.2) и (2.3) запишем в следующем виде

$$\mathbf{r}_k^{(0)} = \mathbf{r}_{01}^{(0)} + \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k)\mathbf{x}_e), \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{01}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\boldsymbol{\rho}_k^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\mathbf{A}_{01}\mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k)\mathbf{x}_e + \mathbf{A}_{01}\mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k)\dot{\mathbf{x}}_e^{(0)}. \quad (2.8)$$

Используя соотношения (2.6), теоретически возможно выполнить интегрирование (2.4) и последующие выкладки, чтобы получить конечные выражения для матрицы масс и вектора сил инерции конечного элемента. Однако объем и сложность вычислений делают эту процедуру невыполнимой при «ручной» реализации. Можно надеяться на успех применения для этой цели программ символьной алгебры, например, Maple или MathLab. Но некоторые предварительные оценки, а также тестовые попытки вывести уравнения движения на основе соотношения (2.8) приводят к выводу, что даже с помощью таких программ конечная цель практически недостижима. Для использования программ символьной алгебры выражение (2.8) должно быть приведено к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{01}^{(0)} - \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k)\mathbf{x}_e)\mathbf{B}^{(1)}\dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{A}_{01}\mathbf{F}_e(\boldsymbol{\rho}_k)\dot{\mathbf{x}}_e^{(0)}, \quad (2.9)$$

чтобы получить выражения в терминах обобщенных координат. Запись выражения (2.5) в явном виде после подстановки (2.9) занимает несколько страниц и содержит многочленные произведения синусов, косинусов и их квадратов. Интегрирование (2.4) с последующими операциями вычисления частных и полных производных в соответствии с методом Лагранжа многократно увеличивают объем и сложность выражений.

Автором были получены матрица масс и вектор сил инерции для плоского движения балочного конечного элемента с использованием программы MathLab. Даже для такого простейшего случая выражения оказались весьма громоздкими и сложными для анализа.

Трудоемкость построения процедур для формирования уравнений движения конечных элементов, вероятно, может быть снижена, если вместо метода Лагранжа использовать, например, принцип виртуальной работы. Однако конечные выражения не зависят от метода их получения.

Итак, реализация рассмотренного подхода предполагает очень трудоемкий этап вывода уравнений движения для всех типов конечных элементов с использованием программ компьютерной алгебры. Результирующие выражения чрезвычайно громоздки, и даже в случае успешного построения их анализ, в частности интегрирование, сильно затруднен для реальных технических систем.

Указанные обстоятельства побуждают прибегать к некоторым упрощениям, которые без существенной потери точности позволили бы резко повысить эффективность моделирования.

Приближение 2. Инерция конечных элементов сосредоточена в узлах. Выражение для кинетической энергии подсистемы тогда примет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} dV \approx \frac{1}{2} \sum_k (m_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega}_k). \quad (2.10)$$

Здесь и далее индекс k относится к узлам конечноэлементного представления упругой подсистемы, m_k – узловая масса, \mathbf{J}_k – узловой момент инерции, $\boldsymbol{\omega}_k$ – угловая скорость узла. Соотношение (2.10) выглядит гораздо менее «пугающим» в смысле перспектив получения уравнений движения. Однако сложности анализа конечных выражений можно прогнозировать, не приступая к их выводу. В основном они определяются двумя обстоятельствами.

1. Большим размером системы уравнений для упругого тела. Вектор обобщенных координат подсистемы имеет вид $\mathbf{q} = [\mathbf{r}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{x}]^T$. Его размер составляет $N+6$. Число упругих координат N для реальных конструкций исчисляется десятками и сотнями тысяч.

2. Наличием в решении высокочастотных составляющих, которые в реальности гасятся внутренним демпфированием.

Чтобы избежать указанных трудностей, используем модальный подход при формировании уравнений движения.

Приближение 3. Аппроксимация малых упругих перемещений тела допустимыми формами. Общий вид соотношения:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^H \mathbf{h}_j w_j = \mathbf{H} \mathbf{w}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) задает преобразование координат. В качестве членов ряда могут выступать любые допустимые формы упругого тела, например, собственные формы. В этом случае при $H=N$, то есть, когда ряд (2.11) представляет собой базис пространства координат \mathbf{x} , получаем точное решение. Однако в подавляющем большинстве случаев используется $H \ll N$ членов ряда (2.11). Подробнее эта тема освещена в параграфе 2.3, посвященном методам редуцирования уравнений движения. Векторы-столбцы \mathbf{h}_j можно рассматривать в качестве векторов Ритца исходной задачи, \mathbf{w} получил название *вектора-столбца модальных координат*, \mathbf{H} – *модальной матрицы*.

Введем набор координат, определяющих положение конечно-элементных узлов упругого тела $\mathbf{q} = [\mathbf{r}^T, \boldsymbol{\varphi}^T, \mathbf{w}^T]^T$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{01}$ – радиус-вектор начала координат присоединенной СК1, $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор-столбец размером 3 углов ориентации, \mathbf{w} – вектор-столбец размером H модальных координат подсистемы.

Узловые степени свободы в k -ом узле представим соотношением:

$$\mathbf{x}_k^{(1)} = \mathbf{H}_k \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^r \\ \mathbf{H}_k^\varphi \end{bmatrix} \mathbf{w}, \quad (2.12)$$

где \mathbf{H}_k^r , \mathbf{H}_k^φ части модальной матрицы, соответствующие поступательным и вращательным степеням свободы в k -ом узле. Тогда положение k -ого узла определяется следующим выражением:

$$\mathbf{r}_k^{(0)} = \mathbf{r}_{01}^{(0)} + \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\rho}_k^{(1)} + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w}). \quad (2.13)$$

Далее приведем полный вывод уравнений движения упругой подсистемы с учетом оговоренных выше допущений. Выражения для членов уравнений получим с использованием уравнений Лагранжа II рода.

2.2.2. Выражение кинетической энергии

Дифференцируя (2.13) по времени, получим выражение для скорости k -го узла:

$$\mathbf{v}_k^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} = \left[\mathbf{E} \quad -\mathbf{A}_{01} \tilde{(\boldsymbol{\rho}}_k^{(1)} + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w}) \mathbf{B}^{(1)} \quad \mathbf{A}_{01} \mathbf{H}_k^r \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.14)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, \mathbf{B} – матрица Якоби, введенная соотношением (1.6), для выражения угловой скорости в векторной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{10}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = \mathbf{A}_{10} \dot{\mathbf{A}}_{01},$$

знак « \sim » (тильда) над скобкой здесь и далее относится к результату, заключенному в паре скобок, который должен иметь значение вектора.

Угловую скорость узла в СК1 представим суммой угловой скорости СК1 и угловой скорости, вызванной упругими перемещениями:

$$\boldsymbol{\omega}_k^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{H}_k^\varphi \dot{\mathbf{w}}. \quad (2.15)$$

Выполнив подстановки выражений (2.14), (2.15) в (2.10), выражение для кинетической энергии упругой подсистемы можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{r\varphi} & \mathbf{M}_{rw} \\ \mathbf{M}_{r\varphi}^T & \mathbf{M}_{\varphi\varphi} & \mathbf{M}_{\varphi w} \\ \mathbf{M}_{rw}^T & \mathbf{M}_{\varphi w}^T & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

Блочная запись матрицы масс делает дальнейший анализ более удобным. Представленные блоки выражаются посредством введения 9 постоянных в СК1 матриц:

Вид выражения	Структура
$\mathbf{J}_m = \sum_k m_k \mathbf{E}$	матрица 3×3
$\mathbf{J}_\rho = \sum_k m_k \boldsymbol{\rho}_k$	вектор-столбец размером 3
$\mathbf{J}_H = \sum_k m_k \mathbf{H}_k^r$	матрица $3 \times H$
$\mathbf{J}_{\rho H} = \sum_k (m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \mathbf{H}_k^r + \mathbf{J}_k \mathbf{H}_k^\varphi)$	матрица $3 \times H$

$\mathbf{J}_{h_i H} = \sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r \mathbf{H}_k^r, i = 1..H$	массив размером H матриц $3 \times H$ (3-х мерный массив)	(2.17)
$\mathbf{J}_{HH} = \sum_k (m_k \mathbf{H}_k^{rT} \mathbf{H}_k^r + \mathbf{H}_k^{\varphi T} \mathbf{J}_k \mathbf{H}_k^\varphi)$	матрица $H \times H$	
$\mathbf{J}_{\rho\rho} = \sum_k (m_k \tilde{\rho}_k^T \tilde{\rho}_k + \mathbf{J}_k)$	матрица 3×3	
$\mathbf{J}_{\rho h_i} = \sum_k m_k \tilde{\rho}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r, i = 1..H$	массив размером H матриц 3×3 трехмерный массив)	
$\mathbf{J}_{h_i h_j} = \sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r \tilde{\mathbf{h}}_{kj}^r, i, j = 1..H$	массив размером $H \times H$ матриц 3×3 (четырёхмерный массив)	

Обобщенную матрицу масс тогда удобно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{rr} & -\mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{B} & \mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{rw} \\ -\mathbf{B}^T \mathbf{J}_{r\varphi}^T \mathbf{A}_{01}^T & \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi w} \\ \mathbf{J}_{rw}^T \mathbf{A}_{01}^T & \mathbf{J}_{\varphi w}^T \mathbf{B} & \mathbf{J}_{ww} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{rr} &= \mathbf{J}_m, \quad \mathbf{J}_{r\varphi} = (\tilde{\mathbf{J}}_\rho + \mathbf{J}_H \mathbf{w}), \quad \mathbf{J}_{rw} = \mathbf{J}_H, \\ \mathbf{J}_{\varphi\varphi} &= -(\mathbf{J}_{\rho\rho} + \sum_i (\mathbf{J}_{\rho h_i} + \mathbf{J}_{\rho h_i}^T) w_i + \sum_{i,j} \mathbf{J}_{h_i h_j} w_i w_j), \quad \mathbf{J}_{\varphi w} = \mathbf{J}_{\rho H} + \sum_i \mathbf{J}_{h_i H} w_i, \\ \mathbf{J}_{ww} &= \mathbf{J}_{HH}. \end{aligned}$$

2.2.3. Вывод уравнений движения упругой подсистемы с использованием уравнений Лагранжа II рода

Выражение для кинетической энергии перепишем в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^T \mathbf{M}_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{M}_{ww} \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{r\varphi} \dot{\varphi} + \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rw} \dot{\mathbf{w}} + \dot{\varphi}^T \mathbf{M}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}. \quad (2.19)$$

Согласно уравнениям Лагранжа (2.1) применим оператор $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$ для каждого слагаемого (2.19).

Для сокращения записи обозначим $L_x(T_n) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_n}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_n}{\partial x}$. В качестве переменной x может выступать скаляр или вектор, T_n – слагаемое выражения (2.19), которое получит более конкретное обозначение при описании соответствующих вычислений.

Перейдем к вычислениям, имея в виду, что $\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\varphi})$, $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{w})$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\varphi)$. При отсутствии дополнительных обозначений вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и матрица \mathbf{V} представлены в СК1; \mathbf{J}_n представлены выражениями (2.18).

В процессе вывода уравнений будет использован следующий результат леммы.

Лемма.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}^{(1)} - \frac{\partial (\mathbf{B}^{(1)} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} \mathbf{B}^{(1)}. \quad (2.20)$$

Доказательство утверждения леммы приводится в приложении 1.

Кроме того, будет использовано следующее тождество:

$$\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{(\mathbf{a}\mathbf{b})}. \quad (2.21)$$

Теперь все необходимые приготовления закончены, и мы переходим к выводу.

1. $\mathbf{M}_{rr} = m\mathbf{E}$, \mathbf{E} – единичная матрица, m – масса подсистемы. Обозначим

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{r}}, \text{ тогда } L_q(T_{rr}) = \mathbf{M}_{rr} \ddot{\mathbf{r}}.$$

2. $\mathbf{M}_{r\varphi} = -\mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{V}$. Обозначим $T_{r\varphi} = \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{r\varphi} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$. Рассмотрим подробно вычисление $L_q(T_{r\varphi})$.

$$2.1. \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = -\mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = 0 \Rightarrow$$

$$L_r(T_{r\varphi}) = -(\dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A}_{01} \dot{\mathbf{J}}_{r\varphi} \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \dot{\mathbf{V}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{V} \ddot{\boldsymbol{\varphi}}).$$

С учетом соотношений $\mathbf{A}_{10} \dot{\mathbf{A}}_{01} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \Rightarrow \dot{\mathbf{A}}_{01} = \mathbf{A}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot{\mathbf{J}} = \sum \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial w_i} \dot{w}_i$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$,

$\boldsymbol{\varepsilon}' = \dot{\mathbf{V}} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ окончательно запишем:

$$L_r(T_{r\varphi}) = -(\mathbf{A}_{01}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_{r\varphi}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}_{01}\sum(\frac{\partial\mathbf{J}_{r\varphi}}{\partial w_i}\dot{w}_i)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}_{01}\mathbf{J}_{r\varphi}\boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{A}_{01}\mathbf{J}_{r\varphi}\mathbf{B}\ddot{\boldsymbol{\phi}}).$$

2.2. Поскольку $\mathbf{J}_{r\varphi}$ – кососимметрическая матрица, перепишем выражение

$T_{r\varphi}$ в следующем виде:

$$T_{r\varphi} = \mathbf{j}_{r\varphi}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{j}_{r\varphi}$ – матрица-столбец, построенная по $\mathbf{J}_{r\varphi}$, и вычислим $L_{\varphi_i}(T_{r\varphi})$.

$$\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \dot{\varphi}_i} = -\mathbf{j}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = -(\dot{\mathbf{j}}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{j}_{r\varphi}^T (\ddot{\tilde{\mathbf{b}}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{b}}_i \dot{\mathbf{A}}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}})),$$

$$\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi_i} = -\mathbf{j}_{r\varphi}^T (\dot{\mathbf{r}}^{(1)} \frac{\partial(\mathbf{b}_i \varphi_i)}{\partial \varphi_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial \mathbf{A}_{01}^T}{\partial \varphi_i} \dot{\mathbf{r}})$$

$$L_{\varphi_i}(T_{r\varphi}) = -(\mathbf{j}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{j}}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{j}_{r\varphi}^T \left(\dot{\mathbf{r}}^{(1)} \left(\dot{\mathbf{b}}_i - \frac{\partial(\mathbf{b}_i \dot{\varphi}_i)}{\partial \varphi_i} \right) + (\tilde{\mathbf{b}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{b}}_i) \dot{\mathbf{r}}^{(1)} \right).$$

Здесь использовано соотношение $\frac{\partial \mathbf{A}_{01}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i$.

Преобразуем множитель в скобках третьего слагаемого с использованием результата леммы (2.20) и тождества (2.21).

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} \left(\dot{\mathbf{b}}_i - \frac{\partial(\mathbf{b}_i \dot{\varphi}_i)}{\partial \varphi_i} \right) + (\tilde{\mathbf{b}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{b}}_i) \dot{\mathbf{r}}^{(1)} = -\dot{\mathbf{r}}^{(1)} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{b}}_i + (\tilde{\mathbf{b}}_i \boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{r}}^{(1)} = -\dot{\mathbf{r}}^{(1)} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{b}}_i + \dot{\mathbf{r}}^{(1)} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{b}}_i = 0.$$

Последнее выражение, по сути, означает справедливость соотношения

$$L_{\varphi_i}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{r}}) = 0.$$

Таким образом,

$$L_{\varphi_i}(T_{r\varphi}) = -\mathbf{j}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{j}}_{r\varphi}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} \text{ и } L_{\varphi_i}(T_{r\varphi}) = \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{A}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{J}}_{r\varphi} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}).$$

$$2.3. L_w(T_{r\varphi}) = \mathbf{k}_{r\varphi}^w, k_{r\varphi(i)}^w = \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{A}_{01} \frac{\partial \mathbf{J}_{r\varphi}}{\partial w_i} \boldsymbol{\omega}.$$

$$3. \mathbf{M}_{rw} = \mathbf{A}_{01} \mathbf{J}_{rw}, \mathbf{J}_{rw} = const, T_{rw} = \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rw} \dot{\mathbf{w}}.$$

$$3.1. L_r(T_{rw}) = \mathbf{M}_{rw} \ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}_{rw} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{A}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}}.$$

3.2. $L_{\varphi}(T_{rw}) = \mathbf{k}_{rw}^{\varphi}$, где

$$k_{rw(i)}^{\varphi} = -\dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{J}_{rw}^T \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{b}_i^T (\tilde{\mathbf{J}}_{rw} \dot{\mathbf{w}}) \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{k}_{rw}^{\varphi} = -\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}}_{rw} \dot{\mathbf{w}} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}.$$

3.3. $L_w(T_{rw}) = \mathbf{J}_{rw}^T \mathbf{A}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{J}_{rw}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}.$

4. $\mathbf{M}_{\varphi\varphi} = \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \mathbf{B}$, $T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{M}_{\varphi\varphi} \dot{\boldsymbol{\phi}}.$

4.1. $L_r(T_{\varphi\varphi}) = 0.$

4.2.

$$\begin{aligned} 2L_{\varphi_i}(T_{\varphi\varphi}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \dot{\phi}_i} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} \right) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \phi_i} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \phi_i} = \\ &= \mathbf{b}_i^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_i^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{b}_i^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\omega}^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \mathbf{b}_i - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{b}_i = \\ &= 2\mathbf{b}_i^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\mathbf{b}_i^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

$$L_{\varphi}(T_{\varphi\varphi}) = \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega}, \text{ где } \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} = \sum_w \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi}}{\partial w_i} \dot{w}_i.$$

$$L_{w_i}(T_{\varphi\varphi}) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi}}{\partial w_i} \boldsymbol{\omega} = k_{\varphi\varphi(i)}^w.$$

5. $\mathbf{M}_{\varphi w} = \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi w}$, $T_{\varphi w} = \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{M}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}.$

5.1. $L_r(T_{\varphi w}) = 0.$

5.2.

$$\begin{aligned} L_{\varphi_i}(T_{\varphi w}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \dot{\phi}_i} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} \right) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \phi_i} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \phi_i} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{b}_i^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \\ &+ \mathbf{b}_i^T \mathbf{J}_{\varphi w} \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{b}_i^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{b}_i^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{b}_i^T \mathbf{J}_{\varphi w} \ddot{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

$$L_{\varphi}(T_{\varphi w}) = \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{\varphi w} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}.$$

$$5.3. L_w(T_{\varphi w}) = \mathbf{J}_{\varphi w}^T \mathbf{B} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{k}_{\varphi w}^w, \quad k_{\varphi w(i)}^w = \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi w}}{\partial w_i} \dot{\mathbf{w}}.$$

6. $\mathbf{M}_{ww} = \mathbf{J}_{ww} = const$, $T_{ww} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{M}_{ww} \dot{\mathbf{w}}$, $L_q(T_{ww}) = \mathbf{M}_{ww} \ddot{\mathbf{w}}.$

Запишем часть уравнений Лагранжа для кинетической энергии, полученных выше, в виде

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}$.

Представим вектор сил инерции в виде $\mathbf{k} = [\mathbf{k}_r^T, \mathbf{k}_\varphi^T, \mathbf{k}_w^T]^T$, тогда:

$$\mathbf{k}_r = -\mathbf{A}_{01} (\mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}}),$$

$$\mathbf{k}_\varphi = \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{J}_{rw}^T \dot{\mathbf{w}}) \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}),$$

$$\mathbf{k}_w = \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' - \mathbf{J}_{rw}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{r\varphi}^w + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w + \mathbf{k}_{\varphi w}^w,$$

$$k_{r\varphi(i)}^w = \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{A}_{01} \frac{\partial \mathbf{J}_{r\varphi}}{\partial w_i} \boldsymbol{\omega}, \quad k_{\varphi\varphi(i)}^w = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi}}{\partial w_i} \boldsymbol{\omega}, \quad k_{\varphi w(i)}^w = \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\varphi w}}{\partial w_i} \dot{\mathbf{w}}$$

Выражения для \mathbf{k}_φ и \mathbf{k}_w содержат не приведенные подобные члены. Действительно, заметим, что

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{r\varphi}}{\partial w_i} = \tilde{\mathbf{j}}_{H(i)} = \tilde{\mathbf{j}}_{rw(i)}, \quad \mathbf{k}_{r\varphi}^w = \mathbf{J}_{rw}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A}_{01}^T \dot{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{r\varphi} = \frac{\partial \mathbf{J}_{r\varphi}}{\partial \boldsymbol{\omega}^T} \dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}}),$$

где $\mathbf{j}_{H(i)}, \mathbf{j}_{rw(i)}$ – i -ые столбцы матриц \mathbf{J}_H и \mathbf{J}_{rw} соответственно. Тогда выражения для компонент сил инерции окончательно примут следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_r \\ \mathbf{k}_\varphi \\ \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{01} (\mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{B}^T (\dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}) \\ \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{\varphi w}^w \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

где второе слагаемое представляет соотношения для расчета сил Кориолиса.

Проверка корректности полученных выражений (2.18, 2.22), включающая доказательство последнего утверждения, проведена на основе их сравнения с выражениями, полученными при использовании общего уравнения динамики в качестве метода вывода уравнений. Этот подход был предложен профессором Погореловым Д.Ю. Доказательство идентичности соотношений полученных обоими способами, приводится в приложении 2.

Выражение для потенциальной энергии запишем в следующем виде:

$$U = U_f + U_g,$$

где U_f – потенциальная энергия упругой деформации подсистемы, U_g – потенциальная энергия гравитации. Рассмотрим последовательно оба слагаемые.

1. $U_f = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$, где \mathbf{C} – матрица жесткости упругой подсистемы, сформированная МКЭ. Выполняя далее дифференцирование $\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}}$, с учетом выражения

(2.11), используя блочное представление матрицы жесткости, аналогичное (2.16), получим следующее выражение:

$$\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{q},$$

где $\mathbf{C}_{ww} = \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H}$ – обобщенная матрица жесткости упругой подсистемы размером $N \times N$. Заметим, что \mathbf{C}_{ww} постоянна в СК1. Ее структура в зависимости от вида выражения (2.11) обсуждается в параграфе 2.3.

2. Выражение для потенциальной энергии гравитации запишем в следующем виде:

$$U_g = \int_V \mu \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV \approx \sum_k m_k (\mathbf{r} + \mathbf{A}_{01} (\boldsymbol{\rho}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{w}))^T \mathbf{g},$$

где \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения.

Обобщенная сила тяжести упругой подсистемы:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{r}^T \sum_k m_k + \sum_k (m_k (\mathbf{A}_{01} \boldsymbol{\rho}_k)^T) + \sum_k (m_k (\mathbf{A}_{01} \mathbf{H}_k \mathbf{w})^T)) \mathbf{g}.$$

Обозначим суммы под знаком производной соответственно S_1 , S_2 , S_3 . Вычислим производные от каждой из этих сумм.

$$1. \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{r}} = \sum_k m_k, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{w}} = 0.$$

$$2. \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_i} = \sum_k (m_k \mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i \boldsymbol{\rho}_k)^T = (\mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i \sum_k (m_k \boldsymbol{\rho}_k))^T = \mathbf{b}_i^T \tilde{\mathbf{J}}_\rho \mathbf{A}_{01},$$

где использовано соотношение $\frac{\partial \mathbf{A}_{01}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i$, $\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{w}} = 0$.

$$3. \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial S_3}{\partial \varphi_i} = (\mathbf{A}_{01} \tilde{\mathbf{b}}_i \sum_k (m_k \mathbf{H}_k \mathbf{w}))^T = \mathbf{b}_i^T \tilde{\mathbf{J}}_H \mathbf{w} \mathbf{A}_{01}^T,$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{w}} = \left(\sum_k (m_k \mathbf{A}_{01} \mathbf{H}_k) \right)^T = \left(\sum_k m_k \mathbf{H}_k \right)^T \mathbf{A}_{01}^T.$$

С учетом соотношений (2.17) окончательно запишем:

$$\mathbf{f}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_m \mathbf{g} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{r\varphi} \mathbf{A}_{01}^T \mathbf{g} \\ \mathbf{J}_H^T \mathbf{A}_{01}^T \mathbf{g} \end{bmatrix}.$$

Внутреннее демпфирование

Внутреннее демпфирование определяется свойствами материала упругой подсистемы. Его также называют структурным. Математическая модель сил демпфирования строится, как правило, на основе диссипативной функции Рэллея [19], которая представляет собой положительную квадратичную форму:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}, \quad d_{ij} = d_{ji},$$

где \mathbf{q} – обобщенные упругие координаты подсистемы, N – число координат.

Непотенциальные обобщенные силы демпфирования задаются соотношениями:

$$\mathbf{f}_d = - \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} = -\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}},$$

то есть, они линейно зависят от обобщенных скоростей.

Постоянная матрица \mathbf{D} может задаваться на основе соотношения:

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{C} + \beta \mathbf{M},$$

где коэффициенты α, β выбираются в зависимости от характеристик материала [48].

Если матрица \mathbf{H} построена по собственным формам подсистемы, существует более удобный способ задания \mathbf{D} . Свободные колебания подсистемы можно рассматривать как набор независимых уравнений движения систем с одной степенью свободы:

$$\ddot{q}_k + 2\mu_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0, \quad k=1..H,$$

где $\omega_k^2 = c_{kk}^w$, c_{kk}^w – диагональ матрицы \mathbf{C}_{ww} , $\mu_k = d_{kk}/2$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}^k = -\mu_k \pm i\sqrt{\omega_k^2 - \mu_k^2}$.

Значение $\mu = \omega$, соответствующее переходу от затухающего колебательного процесса к аperiodическому, как известно, называют критическим. Тогда диагональную матрицу \mathbf{D} удобно задавать в следующем виде:

$$d_{kk} = 2\gamma\mu_{\omega_k}, \quad \mu_{\omega_k} = \omega_k,$$

где пользователю предоставляется выбрать значение $\gamma > 0$.

Обобщенные силы от приложенных нагрузок

В соответствии с разделением координат выражение для обобщенной силы от приложенной в k -ом узле нагрузки, в том числе нагрузки от внешних силовых элементов, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_w \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{f}_r = \bar{\mathbf{f}}_k^{(0)}$, $\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{B}^{T(1)}(\bar{\mathbf{I}}_k^{(1)} + \tilde{\rho}_k^{(1)}\bar{\mathbf{f}}_k^{(1)})$, $\mathbf{f}_w = [\mathbf{H}_k^{rT} \quad \mathbf{H}_k^{\varphi T}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_k^{(1)} \\ \bar{\mathbf{I}}_k^{(1)} \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{f}}_k, \bar{\mathbf{I}}_k$ – сила и момент,

приложенные в узле. Отметим, что \mathbf{f}_r формируется в СК0, остальная часть вектора-столбца обобщенных сил – в СК1.

Существует проблема, связанная с проекцией \mathbf{f}_w сил на пространство модальных координат. Она получила название проблемы так называемых *остаточных сил*, ее суть будет рассмотрена в параграфе 2.3.

Расчет уравнений движения упругой подсистемы

Окончательно уравнения движения упругой подсистемы можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_a - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}.$$

В заключение параграфа несколько слов следует сказать об организации последовательности вычислений членов этого уравнения. В общем, она соответ-

ствуется алгоритму расчета при построении уравнений движения систем тел и содержит три основных этапа:

1. Расчет кинематики тел. Для каждого тела каждой подсистемы объекта рассчитываются значения \mathbf{r}_i , \mathbf{A}_{0i} , \mathbf{B} , $\boldsymbol{\varepsilon}'$ и др.

2. Расчет сил. Рассчитываются активные силы, а также силы значения которых зависят от реакций связей.

3. Расчет обобщенных сил, матрицы масс.

Модель механической системы включает объекты трех категорий (в понятиях динамики систем тел), посредством которых реализуются указанные этапы вычислений: шарниры, силовые элементы и тела (рис. 1.1) [28]. В программе каждый тип шарниров, силовых элементов и тела различной природы представлены классами (в терминах языков объектно-ориентированного программирования), реализующими вычисления соответствующих величин.

§ 2.3. Методы понижения порядка системы уравнений движения упругой подсистемы

Как было отмечено в первой главе и параграфе 2.2, непосредственное интегрирование уравнений движения упругой подсистемы, построенных с применением метода конечных элементов, во многих случаях неэффективно по двум основным причинам:

- 1) большого размера системы уравнений, который может достигать нескольких десятков тысяч, а в некоторых случаях сотен тысяч, следствием чего является высокие потребности в ресурсах ЭВМ;
- 2) наличия в решении высокочастотных составляющих, подавление которых предполагает применение специальных методов интегрирования, поскольку в реальных конструкциях такие составляющие гасятся внутренним демпфированием.

Поэтому моделирование динамики упругих подсистем содержит отдельный этап – понижение порядка системы уравнений движения.

При выводе уравнений в предыдущем параграфе механизм понижения порядка системы задействован посредством использования соотношения (2.11), которое аппроксимирует упругие перемещения тела заранее выбранным набором форм.

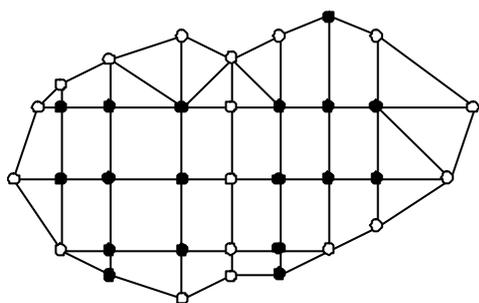
В настоящем параграфе будут кратко рассмотрены основные виды и методы построения таких наборов, рассмотрена структура обобщенных (редуцированных) матриц, построенных в результате их использования. После этого наиболее эффективные методы будут выбраны за основу для реализации в рамках методики построения гибридных моделей.

Методы понижения порядка уравнений можно разделить на три класса:

- 1) статическая конденсация или аппроксимация статическими формами;
- 2) аппроксимация собственными формами колебаний и дополнительными формами;
- 3) комбинация статической конденсации с аппроксимацией собственными и дополнительными формами.

Разнообразие видов форм и схем конденсации обусловило широкий спектр методов понижения порядка систем уравнений движения упругих тел. Мы рассмотрим ключевые моменты наиболее распространенных из них, упомянув про остальные.

2.3.1. Статическая конденсация



Узлы: □ - граничные, ● - внутренние

Рис 2.2. Граничные и внутренние узлы конечно-элементной сетки

Процедура конденсации уменьшает размер системы уравнений движения путем исключения некоторого множества заранее выбранных степеней свободы. Исключение проводится на основе выражения удаляемых (внутренних) степеней свободы в терминах сохраняемых (граничных). В соответствии с методикой узлы конечноэлементной сетки

подсистемы делятся на 2 категории: внутренние и граничные (рис 2.2). Матрицы уравнений движения приобретают блочный вид согласно делению узлов:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где индекс i соответствует степеням свободы во внутренних узлах, b – в граничных.

Зависимость строится на основе матрицы жесткости, матрица масс при этом не рассматривается. Поэтому метод получил название *статической* конденсации. Рассмотрим задачу статики представляемую уравнением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Выразим \mathbf{x}_i из верхней части уравнений (2.24):

$$\mathbf{x}_i = -\mathbf{C}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ib} \mathbf{x}_b + \mathbf{C}_{ii}^{-1} \mathbf{f}_i. \quad (2.25)$$

Поскольку второе слагаемое выражения (2.25) константа для заданных нагрузок, уравнение (2.24) можно преобразовать на основе соотношения:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{x}_b = \mathbf{G}\mathbf{x}_b \quad (2.26)$$

к виду:

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_b = \bar{\mathbf{f}}_b,$$

где $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{bb} - \mathbf{C}_{bi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}$ – редуцированная матрица жесткости; $\bar{\mathbf{f}}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{C}_{bi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i$ – редуцированный вектор-столбец сил. Такое преобразование корректно для статических задач, поскольку не нарушается главное требование – стационарность потенциальной энергии [6].

Матрицу \mathbf{G} можно трактовать как матрицу *статических форм*, столбцами которой являются формы подсистемы, полученные последовательными единичными смещениями в направлении одной из степеней свободы в граничных узлах при закрепленных остальных. Закрепления внутренних узлов при этом отсутствуют.

Для распространения подхода на динамические задачи необходимо ввести два допущения:

- 1) отсутствуют силы инерции, действующие во внутренних (исключаемых) узлах;
- 2) отсутствуют внешние силы, действующие во внутренних узлах.

С учетом сделанных предположений уравнения движения подсистемы можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

и выразить \mathbf{x}_i через \mathbf{x}_b аналогично (2.25) на основе верхней части уравнений (2.27).

Тогда выражение для преобразования матрицы масс примет следующий вид:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{bb} - \mathbf{M}_{bi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} - \mathbf{C}_{bi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{M}_{ib} - \mathbf{C}_{bi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{M}_{ii}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib},$$

или

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{bb} + \mathbf{M}_{bi} \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i^T \mathbf{M}_{ib} + \mathbf{G}_i^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{G}_i.$$

Представленная процедура конденсации преобразует большие разреженные матрицы задачи, сформированные МКЭ, к плотным матрицам малого размера. Вследствие допущения об отсутствии сил инерции во внутренних узлах точность решения определяется удачным выбором граничных узлов. Очевидно, что величина работы сил инерции в граничных узлах должна существенно превосходить величину работы во внутренних узлах.

В работах отечественных специалистов указанная процедура описана в рамках *метода суперэлементов* [34]. основополагающие идеи метода впервые изложены в работе Пржеменицкого [36] и затем развиты в работах Мейснера [20] и др.

В работах зарубежных авторов описанный метод получил название редукции Гайана (Guyan). синонимами категорий граничных и внутренних узлов являются соответственно *master* и *slave* узлы. Работа с изложением основ метода опубликована в 1965 году [58].

Метод статической конденсации реализован в некоторых широко известных программах анализа динамики упругих конструкций, в том числе в модуле ADAMS/FEA. Как отмечают сами авторы программы, метод весьма сложен в применении и не пользуется большой популярностью. Успешный выбор граничных узлов обусловлен опытом исследователя и не всегда возможен.

В работе [27] проведен сравнительный анализ расчетов собственных частот автотрисы АС4 с использованием различных схем конденсации и без нее. Отмечается приемлемое приближение для 5-7 низших частот. С удалением от левого края спектра разница в значениях частот увеличивается, а формы вообще нельзя идентифицировать.

В общем случае в результате преобразований не сохраняются важные динамические характеристики конструкции:

- масса и момент инерции;
- положение центра масс;
- собственные частоты.

Ввиду указанных обстоятельств метод редко используется в настоящее время. В целом подход может рассматриваться, как не очень удачная попытка обобщить методы анализа статики, развитые в рамках МКЭ, на динамические задачи. Соотношение (2.26) означает, что в качестве векторов Ритца выбираются *статические формы* упругого тела.

2.3.2. Собственные формы колебаний

Выберем в качестве членов ряда (2.11) собственные формы колебаний подсистемы. Поскольку в качестве \mathbf{h}_j могут выступать любые допустимые формы, введем обозначение \mathbf{y}_j для собственных форм. Векторы \mathbf{y}_j есть результат решения обобщенной проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{y} = 0. \quad (2.28)$$

В точной постановке, то есть когда $H=N$ множество решений (2.28) образует базис пространства координат \mathbf{x} . На практике для представления решения используется $H \ll N$. Обычным критерием выбора H служит интересующий диапазон частот из спектра колебаний подсистемы. Как правило, используется H форм, соответствующих низшим частотам.

Если \mathbf{y}_j нормировать в норме матрицы \mathbf{M} , то есть удовлетворить следующим соотношениям:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i = 1, \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = 0, i \neq j; i, j = 1..H, \quad (2.29)$$

то матрицы задачи приобретают в модальных координатах диагональный вид:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{H} = \mathbf{E}, \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} = \mathbf{\Lambda}, \quad (2.30)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{Y}$, \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица размером $H \times H$ с собственными значениями на диагонали. Учитывая, что $\lambda_i = \omega_i^2$, где $\omega_i = 2\pi\nu_i$ – круговая частота колебаний, ν_i – частота колебаний в Гц, обобщенную матрицу жесткости в данном случае можно также обозначить $\mathbf{\Omega}$.

Заметим, что при моделировании упругих подсистем с учетом больших перемещений b твердотельных форм должны быть удалены из набора форм, по-

сколькx движение подсистемы как твердого тела описывается степенями свободы присоединенной СК.

При аппроксимации упругих перемещений подсистемы собственными формами возникает проблема так называемых *остаточных сил*, связанная с пренебрежением проекций узловых нагрузок на собственные формы, не включенные в модальную матрицу.

Поясним сказанное на примере (рис. 2.3), утрированном для наглядности.

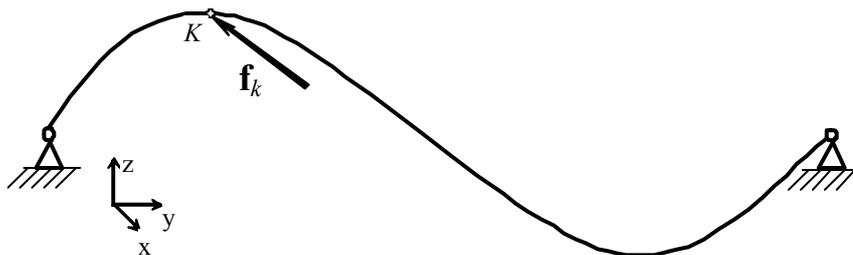


Рис.2.3. Случай возникновения остаточных сил

Если для аппроксимации решения используются формы колебаний в плоскости yz , проекция силы \mathbf{f}_k на модальные координаты, равна 0, и ее действие не будет иметь никакого эффекта.

Величина остаточной силы \mathbf{f}_l от нагрузки \mathbf{f}_k , приложенной в k -ом узле, определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{f}_k - \mathbf{N}_k^r \mathbf{N}_k^{rT} \mathbf{f}_k .$$

Повышение точности моделирования при значительной по величине силе \mathbf{f}_l возможно за счет расширения набора используемых собственных форм.

Альтернативным подходом является дополнение модальной матрицы \mathbf{N} формами упругих перемещений \mathbf{p}_i от единичных нагрузок, приложенных в узле K , в направлениях узловых степеней свободы. Формы \mathbf{p}_i получили название *присоединенных* форм. Присоединенные формы являются столбцами матрицы \mathbf{C}^{-1} , нормированными в норме матрицы масс \mathbf{M} , то есть $\mathbf{p}_i^T \mathbf{M} \mathbf{p}_i = 1$. При этом номер столбца соответствует глобальному номеру узловой степени свободы.

При расчете присоединных форм матрица жесткости \mathbf{C} строится при граничных условиях, соответствующих функционированию подсистемы в составе объекта исследований.

Окончательно выражение для преобразования координат приобретает следующий вид:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^Y \mathbf{y}_j w_{yj} + \sum_{i=1}^P \mathbf{p}_i w_{pi} = [\mathbf{Y} \quad \mathbf{P}] \mathbf{w} = \mathbf{H} \mathbf{w}, \quad (2.31)$$

где Y – число используемых собственных форм, P – число присоединенных форм. Размер редуцированной системы уравнений равен $Y+P$. В дополнение к ортонормированию (2.29) можно выполнить преобразования форм \mathbf{p}_i , чтобы удовлетворить следующим соотношениям:

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = 0, \quad \mathbf{p}_n^T \mathbf{M} \mathbf{p}_i = 0, \quad \text{при } n \neq i.$$

В результате чего обобщенная матрица масс останется единичной, а матрица жесткости примет следующий вид:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix}.$$

В работах автора [23, 24, 26] приведены результаты исследований динамики технических систем, полученные с использованием собственных форм для представления упругих подсистем. Такой подход корректен при отсутствии шарнирных соединений между упругой подсистемой и другими подсистемами составного объекта. В противном случае нарушаются уравнения связей, что приводит к большим погрешностям моделирования.

Далее рассмотрим подход, свободный от этого недостатка.

2.3.3. Метод связанных подструктур

Основная идея метода впервые предложена Хёрти (Hurty) в середине 60-х годов 20-го столетия в работе [61]. Крэйг (Craig) и Бэмптон (Bampton) в 1968 году опубликовали доработанную и упрощенную форму метода в статье [45], которая часто приводится как основополагающая в работах зарубежных авто-

ров. Альтернативный подход предложил Мак Нил (Mac Neal) в 1971 году [66]. Самое распространенное название метода в зарубежной литературе – *component mode synthesis (CMS)*, смысл которого можно перевести как синтез на основе форм компонент. Его также называют *методом связанных подструктур*. Это мощный метод анализа динамики упругих конструкций с большим (до миллиона и более) числом степеней свободы. Сфера его применения шире, чем преобразование уравнений движения упругих подсистем. Основными направлениями использования метода являются [46]:

- 1) построение редуцированных моделей умеренно сложных конструкций, например, самолетов, автомобилей и др.;
- 2) тестовые проверки конечно-элементных моделей компонент сложных конструкций;
- 3) анализ динамических характеристик очень больших конечно-элементных моделей (более миллиона степеней свободы) [41].

Мы преследуем первую из перечисленных целей. При этом упругая подсистема выступает в качестве отдельного компонента, взаимодействующего посредством силовых элементов и шарниров с другими подсистемами объекта, в том числе упругими.

Технология применения метода содержит 6 этапов:

- 1) деление конечно-элементных узлов подсистемы на 2 категории подобно методу статической конденсации;
- 2) расчет форм от единичных факторов, действующих в направлении одной из граничных степеней свободы при закрепленных остальных;
- 3) расчет собственных форм колебаний подсистемы;
- 4) *необязательный этап* – расчет некоторых дополнительных форм;
- 5) построение модальной матрицы и обобщенных матриц масс и жесткости подсистемы;
- 6) *необязательный этап* – ортонормализация базиса модального пространства;

Понятно, что второй и третий этапы могут выполняться независимо, поэтому их очередность произвольна.

Метод имеет две основные формы: Крэйга-Бэмптона и Мак Нила.

Метод в форме Мак Нила рассчитывает присоединенные формы подсистемы под воздействием единичных нагрузок на втором этапе; формы колебаний свободной подсистемы – на третьем. Вариант Мак Нила используется в основном для второго направления из приведенного выше списка. Поэтому более подробно рассмотрим метод в форме Крэйга-Бэмптона.

Метод Крэйга-Бэмптона на втором этапе предлагает поочередный расчет статических форм от единичных смещений в направлении одной из граничных степеней свободы при закрепленных остальных. На третьем этапе рассчитываются собственные формы колебаний при закрепленных граничных степенях свободы. В качестве дополнительных форм в базис может быть включена упругая форма подсистемы под воздействием остаточных сил.

Рассмотрим структуру обобщенных матриц упругой подсистемы. Разделим вектор степеней свободы в соответствии с выбором граничных и внутренних узлов:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix},$$

матрицы подсистемы представим в виде (2.23). Очевидно, что в качестве граничных узлов следует выбирать узлы прикрепления внешних силовых элементов и шарниров. Кроме того, граничным может быть любой узел, приближенное представление движения которого нежелательно. Например, если активная сила приложена в граничном узле, остаточных сил не возникает.

Далее в соответствии со вторым этапом рассчитываются статические формы от единичных перемещений в граничных степенях свободы и располагаются по столбцам матрицы \mathbf{S} .

Рассчитанные на третьем этапе собственные формы колебаний при закреплении в граничных узлах располагаются по столбцам матрицы \mathbf{Y} .

Наконец, модальная матрица принимает следующий вид:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Обобщенная матрица жесткости имеет следующий вид:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}_{ii} \mathbf{Y} & \mathbf{Y}^T \mathbf{C}_{ib} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C}_{ii} \mathbf{S} \\ \mathbf{C}_{bi} \mathbf{Y} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}_{ii} \mathbf{Y} & \mathbf{C}_{bb} + \mathbf{C}_{bi} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}_{ib} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}_{ii} \mathbf{S} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Заметим, что

$$\mathbf{S} = -\mathbf{C}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ib} = \mathbf{G}_i.$$

С учетом этого соотношения окончательно получим:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}_{ii} \mathbf{Y} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{bb} + \mathbf{C}_{bi} \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ii} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{C}}_{bb} \end{bmatrix},$$

где $\bar{\mathbf{C}}_{ii}$ - диагональная матрица.

Выражения для блоков обобщенной матрицы масс имеют вид аналогичный (2.33), $\bar{\mathbf{M}}_{ii}$ диагональная, однако $\bar{\mathbf{M}}_{ib} = \bar{\mathbf{M}}_{bi}^T \neq 0$.

На шестом этапе метода модальная матрица может быть преобразована на основе решения обобщенной проблемы собственных значений редуцированной задачи:

$$(\bar{\mathbf{C}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{y}} = 0. \quad (2.34)$$

Хотя необходимо вычислять весь спектр (2.34), затраты вычислительных ресурсов невысоки, поскольку размер задачи в худшем случае не превосходит нескольких сотен.

Тогда преобразованный набор форм строится на основе соотношения:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} \bar{\mathbf{Y}}. \quad (2.35)$$

Главным преимуществом такого подхода является диагональная форма обобщенных матриц задачи, построенных на основе \mathbf{H}' , что позволяет сократить до минимума затраты на интегрирование уравнений движения упругой подсистемы.

Если твердотельные формы подсистемы не были удалены из базиса ранее, это удобно сделать после решения задачи (2.34). Их число равно количеству

нулевых собственных значений. В практических расчетах ошибки округления приводят к тому, что в спектре появляются очень малые значения.

Рассмотренный метод применяется в некоторых программах для построения редуцированных моделей упругих подсистем. Наиболее известной из них является ADAMS. Метод реализован в этой программе в конце 20-го столетия взамен статической конденсации.

Метод Крэйга-Бэмптона является одним из самых эффективных и универсальных способов редуцирования уравнений движения упругих подсистем. Автору неизвестны работы, предлагающие лучшие альтернативы. Поэтому подход был реализован в рамках методики построения гибридных моделей.

В заключение отметим существование еще одной альтернативы в способах понижения порядка уравнений движения – формы колебаний и *модальная конденсация*. Этот подход кратко описан в работе [68]. Отмечено, что результаты его использования аналогичны результатам, полученным методом связанных подструктур. Потребности в ресурсах ЭВМ для обоих методов также одинаковы.

§ 2.4. Эффективное решение обобщенной симметричной проблемы собственных значений

2.4.1. Предварительные замечания

Построение эффективных гибридных моделей, упругие части которых испытывают малые перемещения за счет деформаций, предполагает решение *обобщенной симметричной проблемы собственных значений*:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = 0, \quad (2.36)$$

где матрица \mathbf{A} имеет смысл матрицы жесткости, \mathbf{M} – матрицы масс.

Это один из самых ресурсоемких и ответственных этапов создания модели, поскольку ее эффективность обусловлена удачным выбором набора собственных форм, представляющих решение, и точностью их расчета. Необходимо решить задачу поиска множества низших собственных пар уравнения (2.36). Набор собственных пар, представляющих решение, определяется целями исследований, свойствами механической системы, характером внешних воздействий.

Основными особенностями задачи являются симметричность, разреженность матриц, положительная определенность матрицы \mathbf{M} и положительная полуопределенность матрицы \mathbf{A} , то есть матрица \mathbf{A} может иметь нулевые собственные значения. Размер задачи для реальных технических систем может достигать нескольких десятков и даже сотен тысяч. С начала выполнения матричных расчетов на ЭВМ задачи делились на «большие» и «малые» в соответствии с возможностью проведения вычислений в оперативной памяти [31]. «Большие» задачи решаются с использованием жесткого диска или других запоминающих устройств, которые обобщенно называются «вторичной памятью».

Понятно, что такая классификация не инвариантна по отношению к типу ЭВМ, операционной системе и методу решения. Кроме того, структура матриц задачи также является определяющей характеристикой наряду с их размером. Учет профильной или ленточной структуры матриц или их разреженности позволяет резко повысить эффективность решения.

За последнее десятилетие прогресс в развитии компьютерной техники сделал указанное понятие еще более размытым. Современные компьютеры с объемом оперативной памяти более 1 Гб позволяют решать разреженные задачи размером несколько десятков тысяч без обращения к вторичной памяти. Кроме того, прикладное программирование в наиболее распространенной операционной системе Windows оперирует с понятием «виртуальное адресное пространство», то есть обмен данными между оперативной памятью и жестким диском в случае необходимости выполняется системой.

Для целей настоящего параграфа термин «большая» в отношении задачи будем применять в случаях, когда явных преобразований матриц желательно избегать вследствие высоких потребностей в ресурсах компьютера, а также влияния ошибок округлений, которые накапливаются в процессе вычислений.

Настоящий параграф посвящен обоснованию выбора базового метода для реализации эффективного алгоритма решения уравнения (2.36). В рамках параграфа будут кратко охарактеризованы известные методы и указаны ключевые моменты реализации метода Ланцоша, выбранного автором. Более подробно результаты проведенного анализа, изложены в приложении 3.

2.4.2. Краткий обзор существующих методов решения симметричной проблемы собственных значений

Рассмотрим простую симметричную проблему собственных значений, представляемую уравнением:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = 0, \quad (2.37)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. При условии положительной определенности матрицы \mathbf{M} формулировки (2.36) и (2.37) теоретически не отличаются. Все методы, подходящие для решения простой симметричной проблемы собственных значений, тем или иным способом распространяются на обобщенную проблему.

Достаточно полный обзор известных подходов к решению задач (2.36, 2.37) представлен в работах [4, 7, 31, 38]. Условно их можно разделить на 3 категории:

1) прямые методы:

- степенные методы: прямые и обратные итерации;
- QR и QL преобразования;
- методы вращений (вращения Якоби);

2) методы аппроксимаций:

- итерирование подпространств;
- метод Ланцоша;

3) методы декомпозиции.

Автор не претендует на полноту классификации, однако она, кажется, в целом отражает ситуацию, сложившуюся в этой области знаний. Каждая последующая группа методов из представленной классификации использует методы предыдущих на отдельных этапах реализации.

Методы первой группы проигрывают конкуренцию методам второй и третьей групп и потеряли значение как самостоятельные методы поиска собственных пар уравнений большого размера.

Методы второй группы применяют широко распространенную в математике процедуру Рунге-Кутты к матричным вычислениям, посредством чего сводят исходную задачу (2.36 или 2.37) к задаче гораздо меньшего размера, решая которую, получаем приближения к собственным парам исходной задачи. Нужно заметить, что метод Ланцоша практически всегда выигрывает в эффективности у методов итерирования подпространств.

С материалом статьи [42], в которой представлен перспективный метод, относящийся к третьей группе, автор познакомился, когда уже были получены все результаты представленные в настоящей работе. Сфера его применения – очень большие задачи, размер которых превосходит один миллион. Его точность несколько ниже, чем у метода Ланцоша, однако вполне достаточная для практических целей.

2.4.2.1. Прямые методы

Имея в виду поставленную задачу, среди прямых методов заслуживает упоминания только **QL** алгоритм, поскольку он является самым эффективным методом решения задач малого размера и применяется на одном из этапов реализации методов аппроксимации.

Прямая итерация непригодна по причине медленной сходимости к *верхнему краю спектра*, которую не улучшает даже применение сдвигов.

Обратная итерация сходится к нижнему краю, причем, выбрав отношение Релея в качестве сдвига, можно добиться кубической сходимости [4]. Однако цена этого – решение системы уравнений с разными матрицами на каждом шаге метода, что неприемлемо для больших задач. Для *последовательного* поиска собственных пар применяется весьма дорогой прием – *исчерпывание* [31]

Методы Якоби используют последовательность плоских вращений для диагонализации матрицы. Модификации отличаются стратегией выбора очередного аннулируемого элемента [38]. Даже лучшие реализации метода Якоби не имеют никаких шансов в конкуренции с **QL** алгоритмом.

QL алгоритм строит посредством ортогональных преобразований матричную последовательность, которая сходится к диагональной матрице. Два ключевых обстоятельства позволили ему стать самым эффективным средством поиска всех собственных значений малых матриц. Во-первых, инвариантность относительно **QL** – преобразований матричной формы Хессенберга, то есть почти треугольной формы. В случае симметричной матрицы это трехдиагональная форма. Преобразования к такой форме всегда предшествуют непосредственному применению алгоритма. Во-вторых, матрица **Q** никогда не вычисляется в явном виде, что существенно снижает запросы к вычислительным ресурсам. Как правило, она представляется произведением $n-1$ матриц плоских вращений [38].

Итак, высокая стоимость явных матричных преобразований либо медленная сходимость не позволяют рассматривать методы первой группы в качестве базовых для построения алгоритмов решения больших задач.

Поэтому естественной кажется попытка редуцировать исходную задачу, то есть свести ее к матричному уравнению меньшего размера и на основе его решения построить аппроксимации к решению исходной задачи. Эффективным средством реализации таких намерений является метод Релея-Ритца, применяемый для решения уравнений во многих областях математики.

2.4.2.2. Методы аппроксимаций

Метод Релея-Ритца

Применение метода к матричным вычислениям является реализацией следующей основной идеи.

Допустим, имеется подпространство L размерности m инвариантное относительно \mathbf{A} . Расположив векторы $\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m$ ортонормального базиса подпространства L по столбцам матрицы \mathbf{Q} , определим матрицу \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}. \quad (2.38)$$

Соотношение (2.38) определяет матричную форму отношения Релея. Матрица \mathbf{H} размером $m \times m$ называется ортогональной проекцией матрицы \mathbf{A} на подпространство L и замечательна тем, что любое собственное значение \mathbf{H} является также собственным значением \mathbf{A} , и каждый собственный вектор \mathbf{s}_i матрицы \mathbf{H} определяет собственный вектор \mathbf{A} посредством следующего соотношения:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{Q} \mathbf{s}_i.$$

На практике инвариантное относительно \mathbf{A} подпространство бывает известно очень редко. Его поиск, вообще говоря, равносильно решению проблемы собственных значений. Поэтому строится подпространство близкое к инвариантному. Вычисления проводят по той же формуле (2.38). Однако собственные значения θ_i матрицы \mathbf{H} уже не являются собственными значениями \mathbf{A} , а каждый собственный вектор \mathbf{H} теперь определяет вектор \mathbf{y}_i подпространства L *близкий* к собственному вектору матрицы \mathbf{A} . Векторы \mathbf{y}_i получили название

векторов Рунца, значения θ_i – чисел Рунца. Расчеты на основе (2.38) теперь означают требование ортогональности всех векторов невязки

$$\mathbf{r}_i(\theta_i, \mathbf{y}_i) = \mathbf{A}\mathbf{y}_i - \theta_i \mathbf{y}_i \quad (2.39)$$

к выбранному подпространству L . На основе формулы (2.39) строятся оценки близости собственных значений \mathbf{H} к соответствующим значениям \mathbf{A} . Алгоритм процедуры Релея-Ритца приведен в приложении 3.

Большинство прикладных задач требуют вычисления множества собственных пар матрицы \mathbf{A} с высокой точностью. Однократное применение процедуры Релея-Ритца в таких ситуациях приводит к успеху, если имеется информация о строении собственного пространства матрицы, что бывает очень редко. В остальных случаях эффективное применение процедуры связано с ее использованием на различных этапах итерационных процессов до достижения сходимости.

Итерации организуются либо с целью уточнения базиса подпространства L , либо с целью его расширения, и, соответственно, увеличения размера подпространства. Метод *итерирования подпространств* построен первым способом, *метод Ланцоша* - вторым.

Итерирование подпространства

Метод итерирования подпространства распространяет простые векторные итерации на группу векторов $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_m$, образующих начальный базис подпространства L , размерностью m . В результате применения метода строится последовательность ортонормальных базисов \mathbf{Q}_i , сходящаяся к базису инвариантного относительно \mathbf{A} подпространства. Поэтому однократное применение процедуры Релея-Ритца на k -ом шаге метода может привести к успеху в поиске отдельных собственных пар, если k достаточно велико. Лучший, по-видимому, алгоритм реализации метода предложен Рутисхаузером [38].

Методы итерирования подпространства успешно применялись специалистами в различных областях науки и техники. Инженеры-строители, например, развивали метод во многом независимо от специалистов в области численного

анализа. Он был основным средством поиска собственных пар матричных уравнений (2.37) большого размера в то время, когда метод Ланцоша, речь о котором пойдет ниже, еще не был развит в достаточной степени. Однако с появлением устойчиво работающих реализаций метода Ланцоша, который практически во всех ситуациях эффективнее, метод итерирования подпространств постепенно вытеснялся.

Метод Ланцоша

Суть метода заключается в применении процедуры Релея-Ритца к *последовательности вложенных* подпространств Крылова.

Замечательной особенностью подпространства Крылова является трехдиагональность ортогональной проекции на него матрицы \mathbf{A} , вследствие чего процедура Релея-Ритца реализуется очень эффективно и даже с некоторой изящностью. Далее будем использовать обозначение \mathbf{T} для трехдиагональной формы \mathbf{H} , α_i – для диагонали \mathbf{T}_j , β_i – для внедиагональных элементов.

Тогда метод Ланцоша для простой проблемы собственных значений на j -ом шаге представляется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_j\mathbf{T}_j &= \mathbf{r}_j\mathbf{e}_j^T, \text{ где } \mathbf{r}_j = \mathbf{q}_{j+1}\beta_j, \\ \mathbf{E} - \mathbf{Q}_j^T\mathbf{Q}_j &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где \mathbf{e}_j – единичный вектор с единицей в j -ой позиции. Векторы ортонормированного базиса подпространства Крылова, расположенные по столбцам \mathbf{Q}_j , называются векторами Ланцоша, а \mathbf{Q}_j – базисом Ланцоша.

Главными особенностями поведения алгоритмов метода Ланцоша являются потеря ортогональности векторов базиса \mathbf{Q}_j и быстрая сходимость в области наибольших по значению собственных частот.

Известными средствами борьбы с потерей ортогональности векторов Ланцоша являются различные варианты переортогонализации: полная, частичная и выборочная. Теоретические основы каждого варианта приведены в приложении 3. Там же приводятся некоторые выводы по результатам проведенных ис-

следований всех перечисленных модификаций алгоритма, реализованных автором. Рекомендуется применять алгоритмы с полной и частичной переортогонализацией.

Вторая проблема разрешается посредством перехода к обратной формулировке задачи (2.36):

$$(\mathbf{M} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A})\mathbf{x} = 0. \quad (2.41)$$

Рассмотрим два подхода к распространению соотношений (2.40) метода Ланцоша на обобщенную проблему собственных значений.

1. Если к матрице \mathbf{M} применимо разложение Холецкого $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, можно использовать неявное приведение к простой проблеме собственных значений на основе следующего соотношения:

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{L}^T\mathbf{x} = 0. \quad (2.42)$$

Эффективная реализация такого подхода возможна, если профиль \mathbf{M} уместается в оперативной памяти ЭВМ. В противном случае можно использовать второй подход.

2. Непосредственно распространить вычислительную схему алгоритма Ланцоша на пару матриц (\mathbf{A}, \mathbf{M}) , то есть перевести вычисления в пространство матрицы \mathbf{M} . Тогда соотношение для одного шага метода принимает следующий вид:

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_{j+1}\beta_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{q}_j - \mathbf{M}\mathbf{q}_j\alpha_j - \mathbf{M}\mathbf{q}_{j-1}\beta_j. \quad (2.43)$$

Неприятным моментом реализации алгоритма в такой форме является необходимость решения на каждом шаге системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Эффективность алгоритма во многом определяется успешной реализацией этого этапа вычислений и сильно зависит от учета разреженности матрицы \mathbf{M} . Применение итерационных методов решения СЛАУ при реализации алгоритма в виде (2.43) требует гораздо меньше оперативной памяти ЭВМ по сравнению с вариантом (2.42), где необходимо хранить профиль матрицы. Однако медленная сходимость итерационных методов полностью «компенсирует» указанное преимущество. Эти

обстоятельства побудили к разработке нового прямого метода решения систем линейных алгебраических уравнений. Его описанию посвящен следующий параграф.

Автором реализованы оба подхода. Их применение приводит к одинаковому результату. Выбор модификации определяется в основном размером задачи.

§ 2.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений большого размера

Как упоминалось, быстродействие алгоритмов Ланцоша во многом определяется возможностью проведения вычислений в оперативной памяти ЭВМ.

Формулировка (2.42) с учетом (2.41) предполагает хранение ненулевых элементов матрицы \mathbf{M} и профиля матрицы \mathbf{A} . Необходимость хранения профиля во многих случаях не позволяет решить задачу в оперативной памяти ЭВМ даже теоретически, несмотря на предпринимаемые усилия по его оптимизации. То есть среда программирования или операционная система позволяет адресовать приложению меньший объем памяти, чем необходимо.

Формулировка (2.43) не налагает никаких ограничений на метод решения системы линейных алгебраических уравнений, и естественной выглядит попытка применения итерационных методов, поскольку необходимо хранить только ненулевые элементы матрицы \mathbf{A} . Требования к объему памяти в этом случае невелики. Однако медленная сходимость к точному решению настолько низка, что сводит указанное преимущество к нулю.

Ниже предлагается новый метод прямого решения систем линейных алгебраических уравнений большого размера, который позволяет резко сократить потребности в оперативной памяти ЭВМ по сравнению с традиционными методами. Основная идея принадлежит профессору Погорелову Д.Ю., на основе которой автор разработал и реализовал алгоритм. Метод опубликован в работе [25]. Понятно, что его применение не ограничивается использованием в рамках метода Ланцоша. Однако именно необходимость многократного (до 100 и более раз) решения СЛАУ с высокой точностью демонстрирует преимущества предлагаемого метода. Его использование в таком качестве позволяет решать задачи с матрицами размером до 250 000 в оперативной памяти современных компьютеров.

Итак, рассмотрим прямой метод решения матричного уравнения

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.44}$$

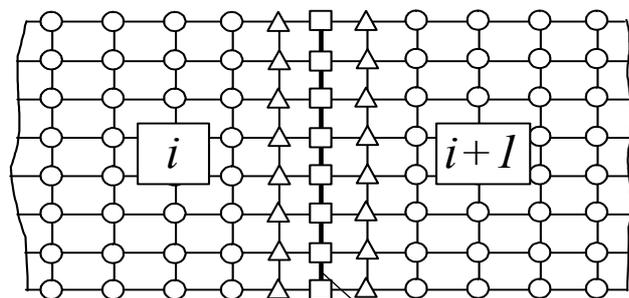
с симметричной положительно определенной матрицей.

Используя перестановки, матрицу \mathbf{A} можно представить в блочно-трехдиагональном виде. Тогда уравнение (2.44) примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{11}^T & \mathbf{D}_1 & \mathbf{B}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{21}^T & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{n,n-1}^T & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{C1} \\ \mathbf{x}_{D1} \\ \mathbf{x}_{C2} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{Cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{C1} \\ \mathbf{b}_{D1} \\ \mathbf{b}_{C2} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{Cn} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

В случае, если уравнение (2.44) сформировано МКЭ, для приведения матрицы к подобному виду можно использовать алгоритмы перенумерации узлов. Блокам матрицы \mathbf{A} можно придать наглядный смысл. Используя $n-1$ сечений, условно разделим конструкцию на части, называемые *подконструкциями*. В соответствии с этим узлы конечно-элементной сетки можно разделить на три категории (рис. 2.4).

1. *Внутренние* узлы подконструкции, связанные посредством КЭ только с узлами той же подконструкции.
2. *Приграничные* узлы подконструкции, связанные посредством КЭ с узлами на границе между подконструкциями.
3. *Граничные* узлы на границе между подконструкциями, другими словами, узлы в сечении.



Узлы:
 ○ – внутренние, □ – граничные, △ – приграничные.

Рис.2.4. Категории узлов КЭ сетки

Блоки \mathbf{C}_i матрицы соответствуют степеням свободы во внутренних и приграничных узлах; \mathbf{D}_i – степеням свободы в граничных узлах; \mathbf{V}_{ij} описывают связь между приграничными и граничными узлами. Выразим \mathbf{x}_{C_i} в терминах \mathbf{x}_{D_i} :

$$\mathbf{x}_{C_i} = \mathbf{C}_i^{-1}(\mathbf{b}_{C_i} - \mathbf{V}_{ii}\mathbf{x}_{D_i} - \mathbf{V}_{i,i-1}^T\mathbf{x}_{D_{i-1}}). \quad (2.46)$$

Тогда уравнение (2.45) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{23}^T & \dots & \mathbf{G}_{n-2,n-1} \\ & & \mathbf{G}_{n-2,n-1}^T & \mathbf{G}_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{D1} \\ \mathbf{x}_{D2} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{Dn-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \dots \\ \mathbf{g}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ii} &= \mathbf{D}_i - \mathbf{V}_{ii}^T\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{V}_{ii} - \mathbf{V}_{i+1,i}\mathbf{C}_{i+1}^{-1}\mathbf{V}_{i+1,i}^T, \\ \mathbf{G}_{i,i+1} &= -\mathbf{V}_{i+1,i}\mathbf{C}_{i+1}^{-1}\mathbf{V}_{i+1,i+1}, \\ \mathbf{g}_i &= \mathbf{b}_{D_i} - \mathbf{V}_{ii}^T\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{b}_{C_i} - \mathbf{V}_{i+1,i}\mathbf{C}_{i+1}^{-1}\mathbf{b}_{C_{i+1}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Таким образом, исходное уравнение (2.44) посредством соотношений (2.48) преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_D = \mathbf{g}. \quad (2.49)$$

Система уравнений (2.49) имеет размер на порядок ниже размера системы уравнений (2.44), что резко снижает потребность в оперативной памяти при ее решении. Вектор решения уравнений (2.44) строится на основе соотношений (2.46).

Таким образом, для эффективной реализации многошаговых алгоритмов, примером которых служит метод Ланцоша, необходимо разместить в оперативной памяти профили матриц \mathbf{G} , \mathbf{C}_i и ненулевые элементы матриц \mathbf{V}_{ij} .

Ключевым моментом обсуждаемой процедуры является более высокая эффективность применения алгоритмов оптимизации профиля матриц \mathbf{C}_i по сравнению с применением тех же алгоритмов к исходной матрице \mathbf{A} в силу «развязывания» соответствующих частей конструкции. Тогда в соотношениях

(2.46), (2.48) выгоднее использовать матрицы $C_i^{P_i}$, связанные с C_i посредством матриц перестановок P_i

$$C_i^{P_i} = P_i^T C_i P_i.$$

Соответственно выражение для вектора решения имеет следующий вид:

$$x_{C_i}^{P_i} = P_i x_{C_i}. \quad (2.50)$$

Наиболее ресурсоемкая операция на этапе формирования матрицы G – вычисление произведения вида $V_{ij}^T C_i^{-1} V_{ij}$. Оно может быть выполнено тремя способами.

1. Выполняется обращение матрицы C и последовательно формируется два произведения.
2. Представим $C_i = L_i L_i^T$, где L – множитель Холецкого разложения матрицы C . Тогда $C_i^{-1} = L_i^{-T} L_i^{-1}$ и произведение запишем в виде $V_{ij}^T L_i^{-T} L_i^{-1} V_{ij}$. Далее запишем $L_i^{-1} V_{ij} = M_{ij}$. Матрица M_{ij} рассчитывается как решение уравнения с нижней треугольной матрицей $L_i M_{ij} = V_{ij}$ и не требует высоких вычислительных затрат. $V_{ij}^T L_i^{-T} = (L_i^{-1} V_{ij})^T = M_{ij}^T$. Таким образом, $V_{ij}^T L_i^{-T} L_i^{-1} V_{ij} = M_{ij}^T M_{ij}$.
3. Произведение формируется последовательностью двукратного решения уравнений с треугольными матрицами $L_i M_{ij}' = V_{ij}$, $L_i^T M_{ij}'' = M_{ij}'$ и одного матричного произведения $V_{ij}^T M_{ij}''$.

Самым эффективным способом как по требованиям к объему оперативной памяти, так и по быстродействию оказался третий способ. Отметим, что на одном шаге формирования матрицы G необходимо вычислить три подобных произведения.

Окончательно процедуру решения СЛАУ большого размера, сформированных МКЭ, резюмируем следующими положениями.

1. Производится деление исходной конструкции на подконструкции.
2. Выполняются процедуры оптимизации профиля для каждой матрицы C_i .
3. Формируется матрица G на основе соотношений (2.48).

4. Решается система уравнений (2.49).
5. Формируется полное решение $x_{C_i}^{P_i}$ согласно (2.46).
6. Ищется решение исходной на основе соотношения (2.50).

Понятно, что многошаговые алгоритмы выполняют вычисления по пунктам 1–3 однократно, а согласно пунктам 4–6 на каждом шаге.

Эффективность предлагаемого метода зависит как от числа подконструкций, на которые «разрезается» исходная конструкция, так и от места расположения сечений. Необходимо стремиться к формированию подконструкций с матрицами равного размера и минимальным числом граничных узлов. К сожалению, алгоритмы, автоматизирующие этот процесс, пока не используются.

Применение рассмотренного метода продемонстрируем на примере задачи поиска собственных форм кузова тепловоза ТЭП70 (рис. 2.5).

Конечно-элементная модель предоставлена Коломенским тепловозостроительным заводом. Она содержит 27880 узлов, 32189 пластинчатых и стержневых конечных элементов, 164088 степеней свободы. Профиль исходной матрицы жесткости занимает более 2 Гб памяти, что больше теоретически возможного для используемого компилятора Borland Delphi. Для решения задачи с исходной матрицей использовался обмен данными с жестким диском.

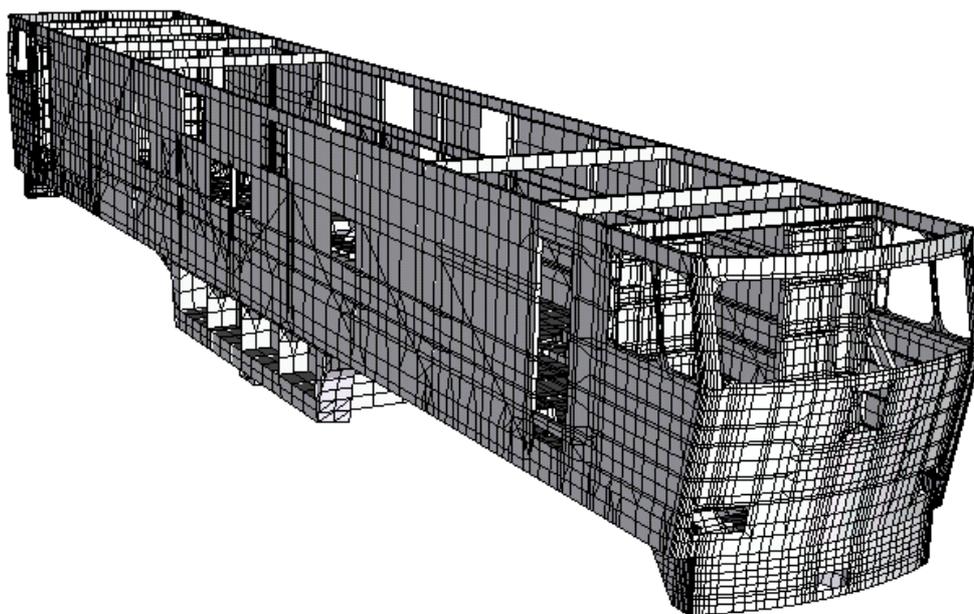


Рис. 2.5. Схема МКЭ тепловоза ТЭП70

Далее был применен метод подконструкций с различным числом и расположением условных сечений по длине кузова. Выбирались сечения в плоскости, перпендикулярной продольной оси кузова. В таблице 2.1 приводятся данные о потребности в оперативной памяти для некоторых вариантов деления конструкции.

Задача решалась на компьютере с оперативной памятью 1 Гб. Для вариантов с тремя, пятью и семью подконструкциями матрица \mathbf{G} не рассчитывалась, потому что расчет нельзя провести в оперативной памяти.

Таблица 2.1.

Требования к оперативной памяти ЭВМ при использовании различного числа подконструкций для поиска собственных пар кузова тепловоза ТЭП70

Число подконстр.	Суммарный объем памяти для профилей C_i , Мб	Объем памяти профиля \mathbf{G} , Мб	Размер матрицы \mathbf{G}
3	1 820	—	—
5	1 308	—	—
7	884	—	—
10	686	46	6 144
16(1)	407	103	11 972
16(2)	360	188	14 732

Для 16 подконструкций было проведено несколько расчетов с разным положением сечений. Параметры двух из них приведены в таблице. Вариант 16(1) превосходит 16(2) по скорости формирования \mathbf{G} , однако проигрывает на этапе вычислений собственных пар методом Ланцоша. Общее время расчетов для обоих вариантов весьма близко. К сожалению, добиться получения матриц подконструкций близкого размера не вполне удалось. Размер профилей C_i изменяется для последнего варианта в пределах от 2,5 Мб до 62 Мб. Неблагоприятными в этом смысле являются кабины, где на небольшое расстояние по длине приходится значительное число узлов.

Отметим общий успех применения метода. Требуемый объем памяти для проведения всего расчета сократился до величины немного большей, чем 700

Мб. Общее время поиска 10 собственных пар конструкции сократилось почти в 5 раз и составило для персонального компьютера с процессором Пентиум 4 1,6 ГГц примерно 2 часа. Среднее время на 1 шаг метода Ланцоша сократилось с 5-6 минут до 16 сек. Понятно, что при необходимости поиска большего числа собственных пар преимущества метода подкострукций будут еще более очевидны.

Кроме того, были проведены численные эксперименты с целью сравнения быстродействия методов в случае, когда исходную задачу можно разместить в оперативной памяти. Они показали, что расчет без использования метода подкострукций выполняется немного быстрее в случае «хорошего» профиля исходной задачи, иначе метод подкострукций предпочтительнее.

Ниже представлен простой, но весьма эффективный алгоритм перенумерации элементов матриц с целью сокращения числа нулевых элементов в профиле. Он используется на втором этапе описанного выше метода подкострукций.

§ 2.6. Волновой алгоритм перенумерации элементов структуры

Рассмотрим некоторую абстрактную структуру, состоящую из n связанных однотипных элементов, пронумерованных от 1 до n без повторения номеров. Введем $n \times n$ симметричную матрицу \mathbf{G} , отражающую наличие связей между элементами структуры. Если элемент i связан с элементом j , $\mathbf{G}[i,j]=\mathbf{G}[j,i]=1$, в противном случае $\mathbf{G}[i,j]=\mathbf{G}[j,i]=0$. Так можно представить, например, структуру матриц уравнения (2.36), где единицы соответствуют ненулевым элементам. Подобным же образом можно представить схему МКЭ, где в качестве элементов структуры выступают узлы, связанные посредством конечных элементов.

Алгоритм, предлагаемый в настоящем параграфе, предназначен для перенумерации элементов структуры с целью уменьшения числа нулевых элементов в профиле матрицы связей \mathbf{G} . Он может применяться непосредственно к матрицам задачи либо к узлам конечно-элементной сетки. Поскольку структура мат-

риц задачи определяется нумерацией узловых координат, результаты в обоих случаях очень близки.

Для формального описания алгоритма введем ряд обозначений:

Обозначение	Словесное описание категории элементов
L	«слой» – множество элементов, связи которых анализируются на j -ом шаге алгоритма.
S	элементы следующего ($j+1$) слоя, предварительно выбранные при анализе связей элементов j -го слоя.
V	элементы, не рассмотренные ранее
X	элементы, исключенные из рассмотрения (для которых анализ завершен)
C_i	элементы, связанные с элементом i .
$cNum$	текущее число последовательно пронумерованных элементов
$iNew$	новый номер элемента i , где i – старый (исходный) номер.
$ S $	модуль множества – число элементов

Множества L,S,V,X не перекрываются, то есть пересечение любой пары из них есть \emptyset . Тогда множество элементов структуры представляется прямой суммой $N=L+S+V+X$.

Алгоритм

0. Выбирается стартовый элемент i . Полагается $iNew=1$, $cNum=1$, $S:\{k=i\}$, $X=\emptyset$, $L=\emptyset$, $V=N-S$;

Пока $cNum <> n$ выполняется цикл.

1. $L=S$. «Фиксируется» слой выбранный на предыдущем шаге.

2. Формируется $S:\{k \in \sum_{i \in L} C_i \cap V\}$, $kNew=cNum+1...cNum+|S|$, $V=V-S$. После-

довательно просматриваются и нумеруются связи элементов текущего слоя L из числа еще не рассмотренных.

3. $X=X+L$. Элементы текущего слоя исключаются из рассмотрения.

4. Если $|S|>0$, выполняется следующий шаг. Если $|S|=0$ и $cNum=n$, алгоритм завершает работу. Если $|S|=0$ и $cNum<n$, выбирается новый стартовый элемент; такая ситуация соответствует, например, блочно-диагональной матрице.

Работу алгоритма иллюстрирует рис. 2.6, на котором представлены 2 первых шага.

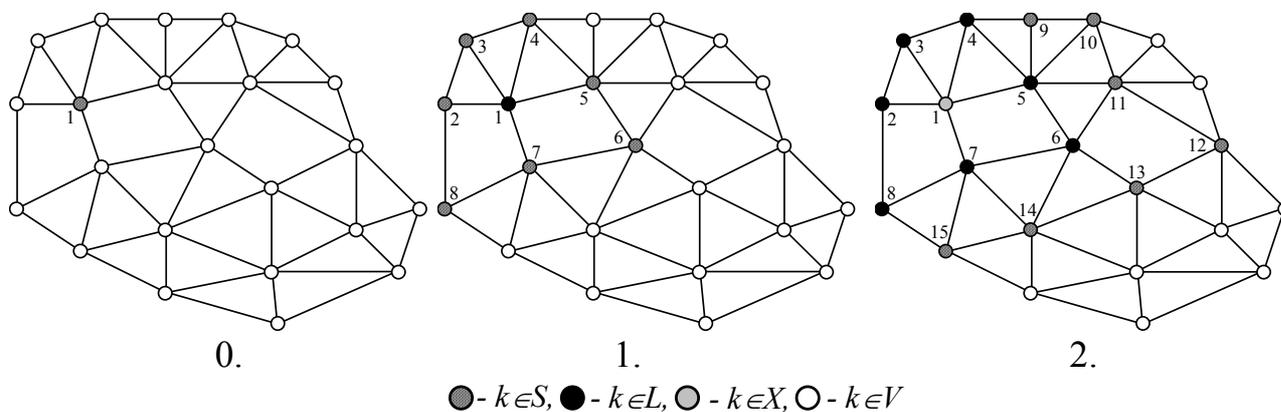


Рис 2.6. Демонстрация работы алгоритма перенумерации элементов структуры: 0 – выбор стартового элемента; 1,2 – первые два цикла алгоритма

Эта иллюстрация напоминает процесс распространения волны от «возмущения» в элементе 1, поэтому алгоритм назовем «волновым».

При выборе стартового элемента можно руководствоваться любой полезной информацией о структуре матриц или конечно-элементной схемы. Вообще говоря, этот выбор случаен. Опыт применения алгоритма показал, что влияние этого фактора на конечный результат не превосходит 10-15%. Стоит отметить, что помимо уменьшения числа нулевых элементов в профиле матриц, результатом его применения является также равномерная вдоль диагонали матрицы ширина ленты, что важно, например, если профиль приходится хранить на жестком диске.

Основными преимуществами волнового алгоритма являются простота реализации, быстрое действие и вполне приемлемые результаты применения. Понятно, что степень уменьшения ширины ленты (или объема профиля) зависит от удачного выбора первоначальной нумерации. Опыт использования алгоритма показал, что число нулевых элементов в профиле может быть снижено с его помощью в 2 – 5 раз.

§ 2.7. Выводы по результатам теоретических исследований. Общая схема методики построения гибридных моделей

В настоящей главе поэтапно рассмотрена технология (методика) построения гибридных математических моделей, в которых упругие и абсолютно твердые тела взаимодействуют посредством произвольных силовых элементов.

В параграфе 2.1 показано, что подходящим способом объединения тел различной природы в составе модели является метод подсистем. Он позволяет объединять подсистемы, уравнения движения которых синтезируются независимо от условий взаимодействия как в символьной, так и в численной форме. Метод разработан профессором Погореловым Д.Ю. для твердотельных моделей; автор обобщил его для включения в модель упругих подсистем.

В параграфе 2.2 выводятся уравнения движения упругой подсистемы с учетом ее большого движения как абсолютно твердого тела и малых упругих перемещений за счет деформаций. Для этого используется метод ПСК и уравнения Лагранжа II рода. Малые упругие перемещения подсистемы за счет деформаций в локальной СК представляются МКЭ. Для понижения порядка уравнений движения применяется переход к модальным координатам, что предполагает решение обобщенной проблемы собственных значений.

В параграфе 2.3 рассмотрены существующие методы перехода к модальным координатам. Показано, что наиболее эффективным является метод связанных подструктур (метод Крэйга-Бэмптона). При отсутствии шарнирных взаимодействий упругих подсистем с другими подсистемами объекта решение также может аппроксимироваться собственными формами.

В параграфе 2.4 анализируются существующие методы решения обобщенной проблемы собственных значений. Сделан вывод о целесообразности использования метода Ланцоша.

В параграфе 2.5 предлагается новый прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений большого размера. Его использование на каж-

дом шаге алгоритмов Ланцоша позволяет резко повысить их эффективность в случае решения задач, исходный профиль которых невозможно разместить в оперативной памяти ЭВМ. Метод получил условное название метода подконструкций. Его эффективность продемонстрирована на примере расчета собственных форм кузова локомотива ТЭП70.

Заключительный параграф 2.6 представляет простой, но весьма эффективный алгоритм уменьшения числа нулевых элементов в профиле матриц задачи, который может применяться на различных этапах формирования и решения матричных уравнений: нумерации конечно-элементных узлов, непосредственно к исходному профилю построенных матриц, либо в рамках метода подконструкций.

Итак, в главе 2 приведены теоретические основы всех этапов, необходимых для дополнения системы абсолютно твердых тел упругими телами, то есть построения гибридных математических моделей механических систем.

На рис. 2.7 схематично представлены основные этапы исследований механических систем методом гибридных моделей на основе интегрирования уравнений движения. Форма уравнений движения численно-символьная, поэтому они частично синтезируются на каждом шаге интегрирования.

Последовательность действий при подготовке данных на стадии препроцессора для упругих и твердотельных подсистем представлена на рис. 2.8, 2.9.

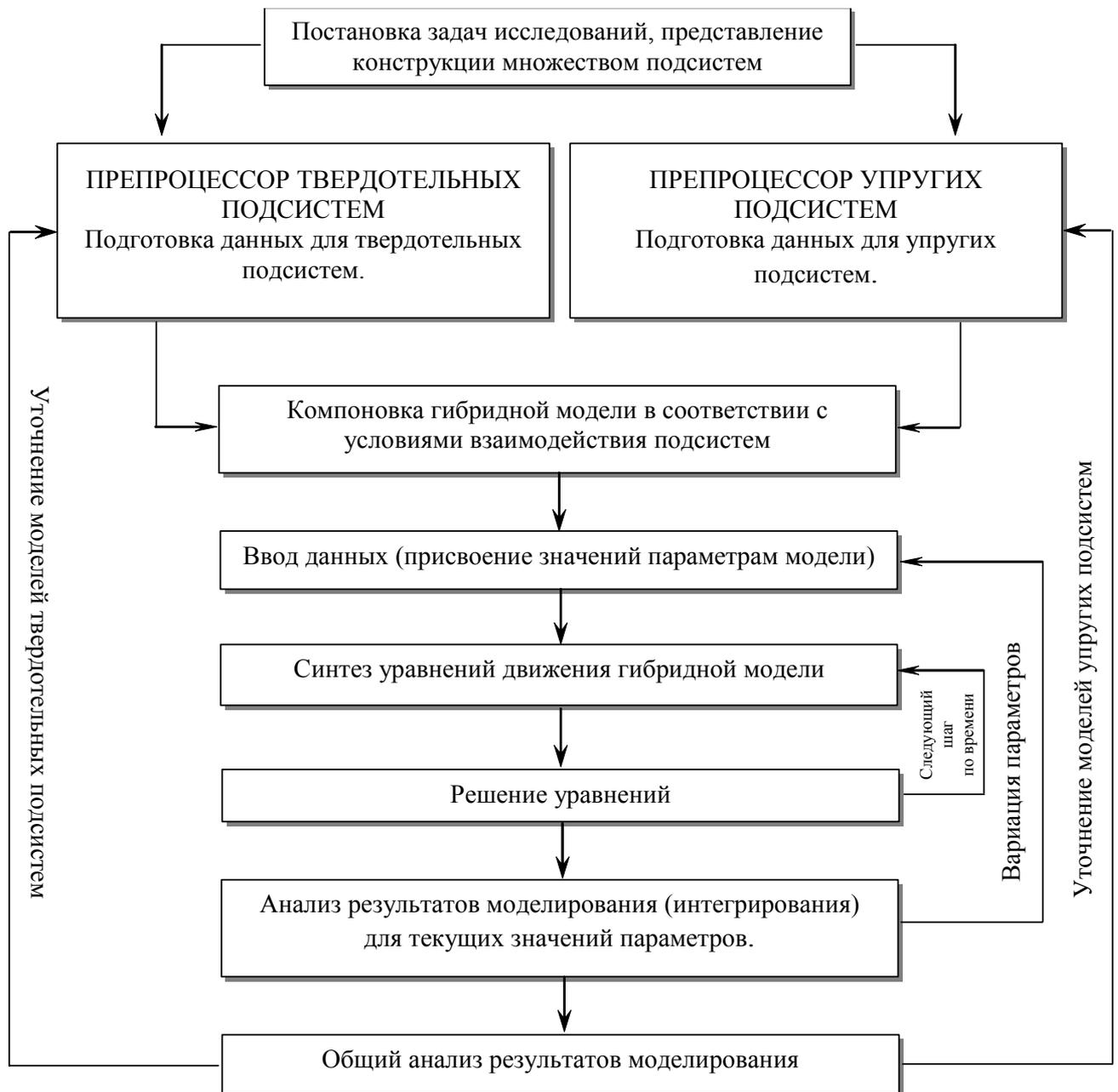


Рис. 2.7. Основные этапы исследований механических систем методом гибридных моделей на основе интегрирования уравнений движения

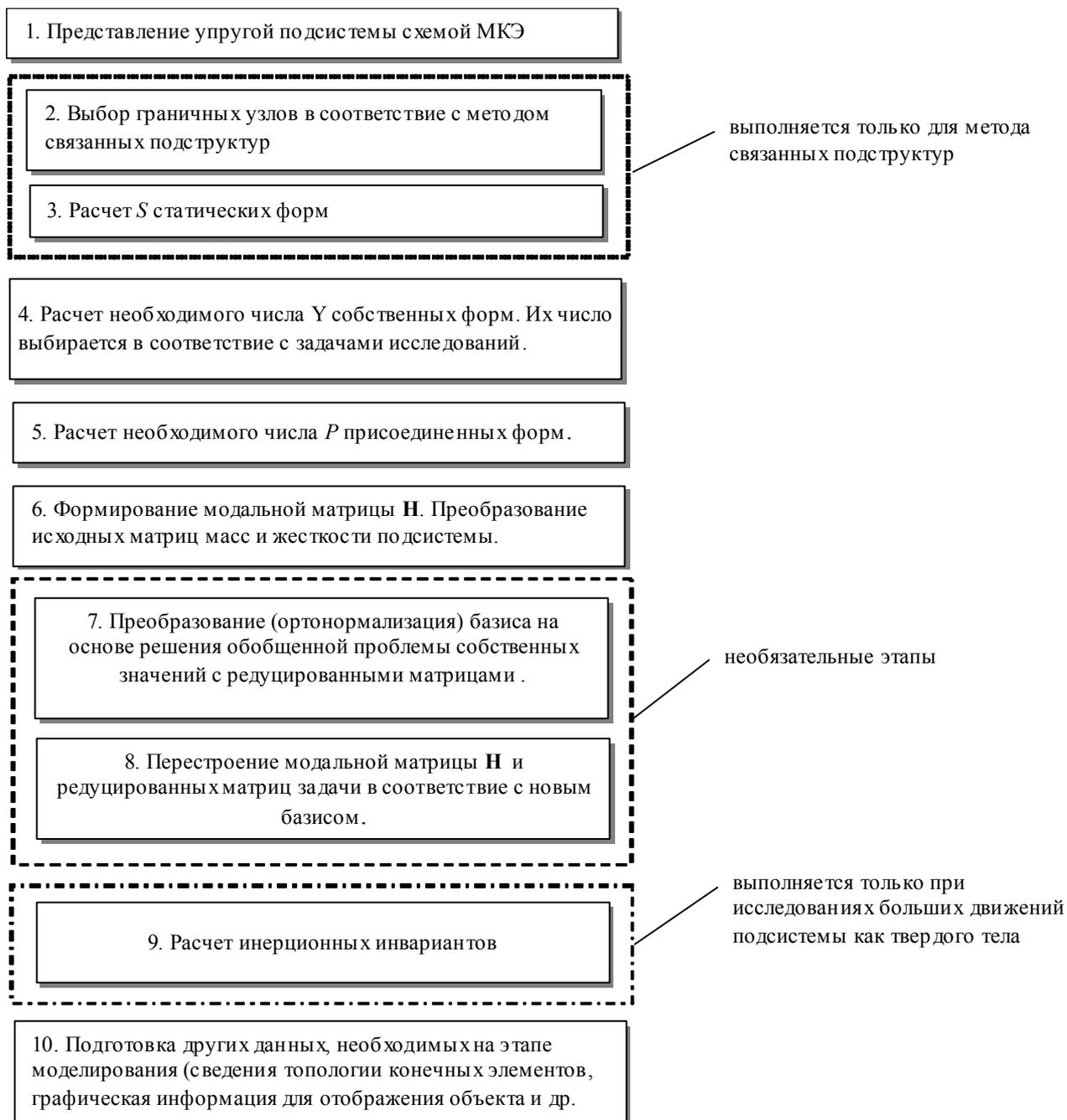


Рис. 2.8. Основные этапы подготовки данных, выполняемые препроцессором упругих подсистем

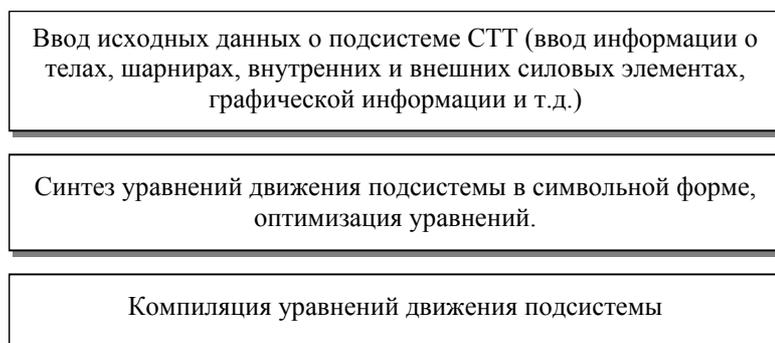


Рис. 2.9. Основные этапы подготовки данных, выполняемые препроцессором твердотельных подсистем

ГЛАВА 3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ, ТЕСТИРОВАНИЕ И ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

§ 3.1. Программная реализация методики

Разработанная в главе 2 методика реализована в виде модуля UMFeM к программному комплексу УМ, по сути являющегося развитием метода подсистем с целью моделирования гибридных объектов. Модуль разработан в среде Delphi для Windows с применением технологии объектно-ориентированного программирования. Структура модуля соответствует структуре программного пакета УМ и общей последовательности действий при моделировании динамики сложных объектов, которая включает:

- 1) подготовку исходных данных о подсистемах объекта;
- 2) синтез уравнений движения подсистем;
- 3) компоновку объекта;
- 4) численный анализ уравнений движения составного объекта.

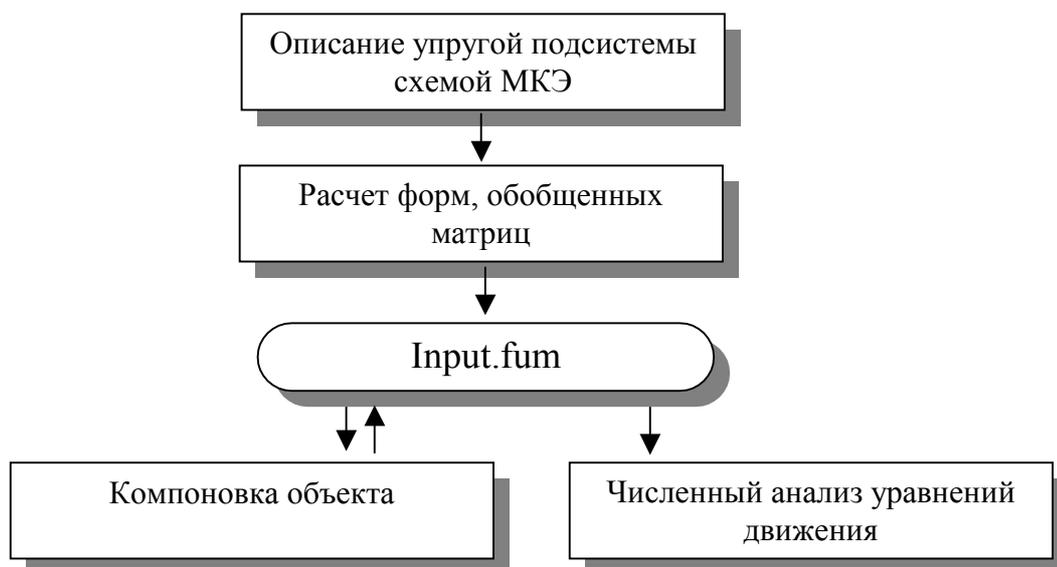


Рис.3.1. Структурная схема организации программного модуля UMFeM

При моделировании упругих тел в составе гибридной модели первым двум этапам этой последовательности соответствуют (рис. 2.8):

- представление конструкции схемой МКЭ;
- расчет форм конструкции и обобщенных матриц.

Подготовленные данные хранятся в бинарном файле `input.fum`, который используется на последующих этапах моделирования (рис. 3.1).

Файл содержит следующую информацию:

- 1) имя подсистемы, имя программы подготовки данных, дата и время подготовки данных, комментарий;
- 2) узлы конечноэлементной схемы;
- 3) конечные элементы;
- 4) связи;
- 5) диагональную матрицу масс подсистемы;
- 6) частоты подсистемы;
- 7) формы подсистемы;
- 8) обобщенные матрицы масс и жесткости.

Подробное описание формата файла `input.fum` приводится в приложении 4.

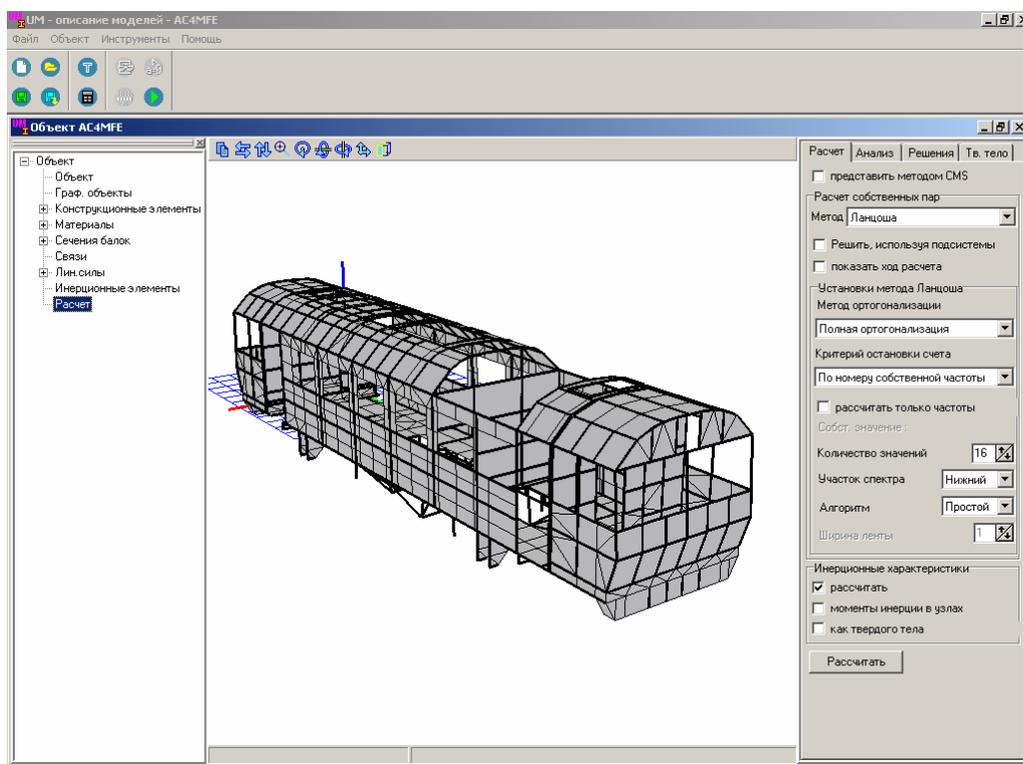


Рис 3.2. Главное окно программы подготовки данных об упругой подсистеме

Далее будем использовать термин «описание модели» для совокупности информации, упомянутой в пунктах 1-4, и термин «решение» для информации, указанной в пунктах 5-8. Описание модели неизменно на этапах компоновки объекта и численного анализа уравнений движения. Решение может быть преобразовано на этапе компоновки объекта. Об этом будет сказано ниже.

Код UMFem, отвечающий за подготовку файла input.fem, встроен в программу UMInput.exe программного комплекса УМ. Он предоставляет необходимый набор возможностей для описания упругой конструкции в терминах МКЭ с применением стержневых и пластинчатых конечных элементов. В рамках модуля реализованы разработанные средства модального анализа. Общий вид главного окна программы подготовки данных упругой подсистемы приведен на рис. 3.2.

С помощью модуля UMFem построены гибридные модели автотрисы АС4 для тестового моделирования, а также модель реальной технической системы – щебнеочистительной машины ЩОМ 1200. Они будут рассмотрены в параграфах 3.3, 3.4. Предполагается дальнейшее развитие UMFem, в рамках которого будут расширяться сервисные возможности при подготовке модели, библиотека конечных элементов, совершенствоваться методы модального анализа. Однако автор совсем не претендует на конкуренцию с широко известными и применяемыми во всем мире программами МКЭ: ANSYS, NASTRAN и др. Интерфейс с такими программами значительно расширяет класс упругих конструкций, которые возможно моделировать, и делает доступной предлагаемую методику большому кругу инженеров-исследователей в области машиностроения.

В рамках настоящей работы был разработан интерфейс с программными пакетами ANSYS и DSMFem. Ниже об этом будет сказано подробнее. Кроме того, разработан конвертер данных из программы BASYS, на основе которых осуществляется полный цикл расчетов в модуле UMFem. Конвертер обладает ограниченными возможностями по типу конечных элементов. Он был использован

для импорта в UMFem конечно-элементной схемы кузова тепловоза ТЭП70 (параграф 2.5).

На этапе компоновки упругая подсистема связывается с другими подсистемами составного объекта, в том числе упругими. Объект может содержать несколько одинаковых упругих подсистем, т.е. подсистем, конечно-элементное описание которых идентично. При этом наборы форм, представляющих решения идентичных по описанию подсистем, могут быть различными. С другой стороны, может стоять задача оценки влияния той или иной формы упругой подсистемы на ее динамику, что предполагает ряд численных экспериментов с различным набором форм. Перспектива многократного проведения модального анализа, особенно для упругих подсистем, имеющих большое число степеней свободы, не кажется привлекательной. Поэтому в части модуля UMFem, отвечающего за компоновку объекта, наряду с необходимыми инструментами была реализована возможность быстрого изменения набора форм в решении без применения повторного модального анализа. Подсистему, в решении которой содержится максимальное число собственных форм, которые предполагается использовать при моделировании, назовем *порождающей*. Разработанный в UMFem инструмент позволяет быстро строить различные решения на основе данных порождающей подсистемы путем исключения некоторых собственных форм. Особо отметим, что исключать можно только собственные формы, поскольку исключение статических форм приводит к некорректной математической модели подсистемы. Общий вид главного окна программы компоновки объекта приведен на рис. 3.3.

Часть модуля UMFem, используемая на этапе *численного анализа уравнений движения* объекта, встроена в программу UMSimul.exe программного комплекса УМ. В этой части реализован алгоритм численного синтеза уравнений движения, который включает следующие процедуры:

- анализ кинематики упругой подсистемы;
- расчет матрицы масс и сил инерции;
- расчет обобщенных сил от приложенных нагрузок;

- расчет уравнений связей.

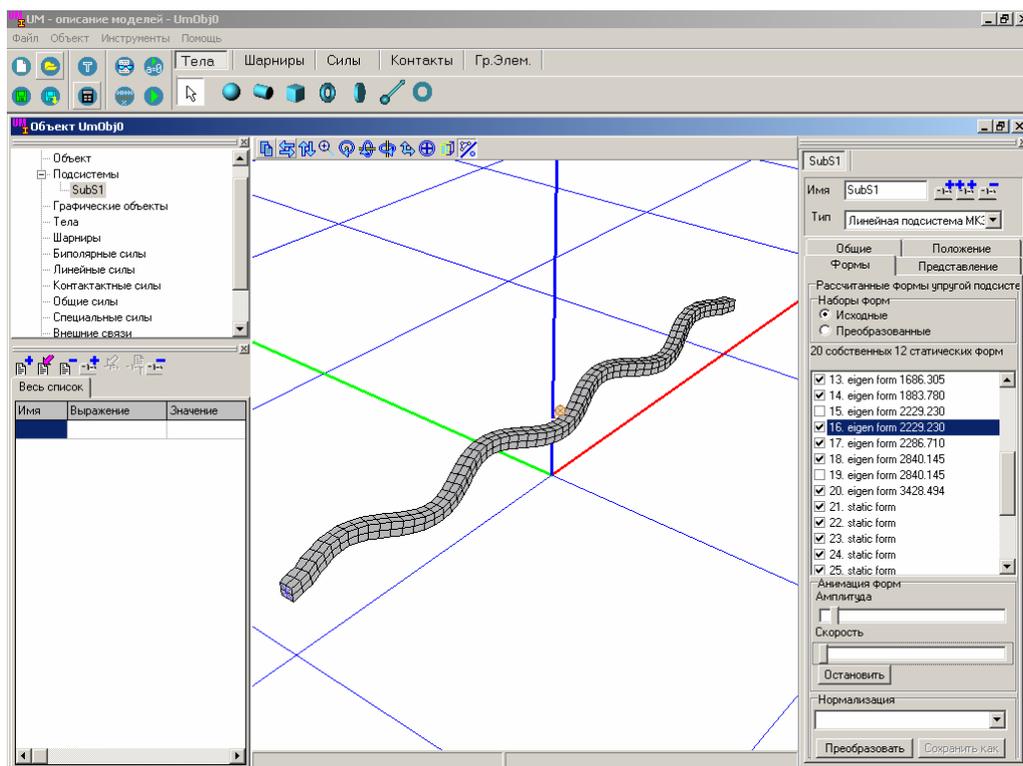


Рис. 3.3 Общий вид главного окна программы компоновки объекта

При этом в отношении упругой подсистемы поддерживаются практически все инструменты анализа объекта, описанные в руководстве пользователя программы УМ. Для реализации взаимодействия между данной упругой подсистемой и другими подсистемами объекта посредством внешних силовых элементов и шарниров используются стандартные внутренние процедуры УМ. Для их функционирования созданы процедуры расчета текущих значений кинематических характеристик требуемых узлов, а также выражения для матриц Якоби, используемые при построении уравнений связей.

Главное окно программного модуля анализа уравнений движения приведено на рис. 3.4.

Мы не будем останавливаться на внутренней структуре классов программного модуля UMFem. Отметим лишь, что в программе ввода данных классы соответствуют основным понятиям МКЭ: узел, конечный элемент, материал, сечение стержня и т.д. Кроме того, разработан набор классов, реализующих

матричные вычисления для различных форматов хранения матриц. При компоновке объекта и численном анализе уравнений движения используются наследники базового класса «упругая подсистема», реализующие функциональность, необходимую на каждом из этапов моделирования.

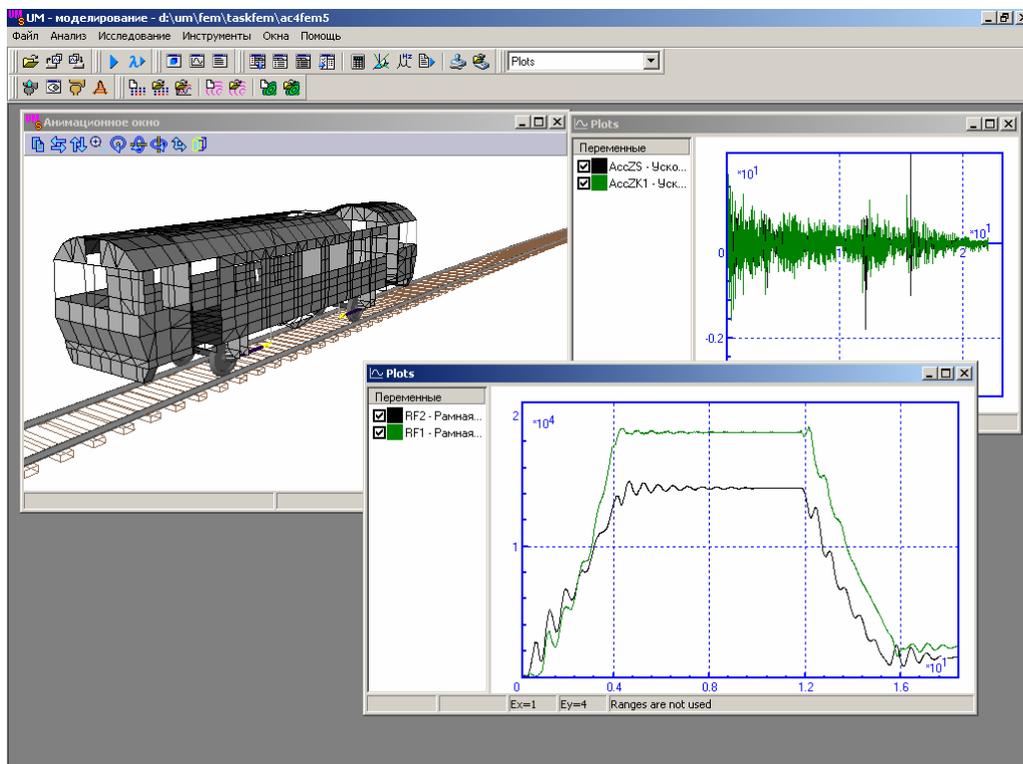


Рис. 3.4 Общий вид главного окна программы моделирования

Организация интерфейсов с внешними программами МКЭ

Как отмечено выше, уравнения движения упругой подсистемы строятся на основе информации, содержащейся в файле `input.fum`, структура которого четко оговорена. При этом выполнение этапов компоновки и численного анализа уравнений движения никак не зависит от программы подготовки данных. В качестве расширения возможностей разработанного программного обеспечения кратко рассмотрим интерфейсы к программам ANSYS и DSMFem, реализованные автором.

Организация интерфейса с программой ANSYS

ANSYS является одной из самых распространенных в мире программой конечно-элементного анализа упругих конструкций. Она разрабатывается на про-

тяжении уже нескольких десятилетий и реализует самые передовые идеи в этой области. Замечательной особенностью программы является ее открытость, то есть доступность информации о модели и результатах расчетов на любом этапе процесса вычислений. Практически вся необходимая информация сохраняется в файлах, формат которых опубликован. Более того, ANSYS предлагает библиотеку процедур для доступа к данным этих файлов.

В среде ANSYS возможно программирование на APDL (ANSYS Parametric Design Language). Это специальный язык, который предоставляет возможность построения параметризованных моделей и позволяет автоматизировать процесс их исследования. Программы на языке APDL оформляются в виде макросов и вызываются из командной строки ANSYS. Подробное описание всех упомянутых средств ANSYS можно найти в руководстве по программированию в среде программы.

Таким образом, ANSYS предоставляет все возможности для организации интерфейса с программой. Для формального описания процедуры импорта данных, реализованной автором, предположим, что в среде ANSYS подготовлена модель МКЭ с именем flexmodel. Процедура импорта данных содержит следующие этапы:

- 1) выбор интерфейсных (граничных) узлов посредством команды nsel языка APDL;
- 2) выполнения макроса umexport.mac;
- 3) выполнения программы ANSYS_UM.exe, разработанной автором, которая запускается автоматически.

Кратко поясним второй и третий этапы импорта. Макрос umexport.mac требует задание двух параметров: числа экспортируемых собственных форм подсистемы и варианта формулировки обобщенной проблемы собственных значений. Значение 0 второго параметра задает постановку задачи с полной матрицей масс, любое другое значение приводит к расчету с диагональной матрицей. Макрос автоматизирует следующие вычисления в среде ANSYS, которые опишем в порядке выполнения.

1. Расчет матриц масс и жесткости незакрепленной подсистемы. Для постановки с полной матрицей масс дополнительно рассчитывается диагональная матрица. Файл `flexmodel.full`, в который сохраняются матрицы подсистемы, переименовывается в `flexmodel.free`, файл диагональной матрицы масс переименовывается в `flexmodel.mlmp`.
2. Расчет собственных и статических форм, соответствующих выбранным граничным узлам. Описание модели и результаты расчета форм сохраняются в файле `flexmodel.rst`.

Файлы с расширениями `rst`, `free` и `mlmp` предоставляют полный набор данных для создания файла `input.fem`, выполняемого программой `ANSYS_UM.exe`. Основные функции программы – построение обобщенных матриц подсистемы и преобразование формата данных. По желанию исследователя на этом этапе также может быть выполнена ортогонализация форм подсистемы, но в этом случае она не сможет выступить в роли порождающей подсистемы в дальнейшем.

На основе импорта данных из ANSYS выполнен тестовый расчет кривошипно-ползунного механизма в параграфе 3.2.

Организация интерфейса с программой DSMFem

Программный комплекс DSMFem создан группой специалистов кафедры «Динамика и прочность машин» Брянского государственного технического университета и предназначен для прочностных расчетов методом конечных элементов. Комплекс разрабатывается с начала 1980 годов и в настоящее время является развитым инструментом анализа, что подтверждается положительным опытом его применения в промышленности, научных исследованиях и в учебном процессе. Подробная информация о возможностях комплекса и примерах его использования размещена на официальном сайте DSMSoft – www.dsmsoft.ru.

В текущем году появилась идея объединить усилия разработчиков УМ и DSMFem с целью развития программных средств построения и анализа гиб-

ридных моделей. Первым этапом сотрудничества явилась организация импорта данных из DSMFem. Создание файла input.fum на основе данных модели МКЭ с именем flexmodel, подготовленной в среде DSMFem, включает следующую последовательность действий:

- чтение данных описания модели из файла flexmodel.fib программного комплекса DSMFem;
- чтение матрицы масс из файла flexmodel.mm и матрицы жесткости flexmodel.mg программного комплекса DSMFem;
- проведение модального анализа в среде UMFem, формирование обобщенных матриц;
- формирование файла input.fum

В качестве несомненных достоинств DSMFem стоит отметить весьма развитую библиотеку конечных элементов, позволяющую проводить полный цикл расчетов, импортируя описание модели из других пакетов МКЭ. Далее эту возможность предлагается использовать для организации интерфейса с MSC.Nastran.

Интерфейс с программой МКЭ MSC.Nastran

Программный пакет MSC.Nastran наряду с ANSYS имеет обширный круг пользователей во всем мире. В отличие от ANSYS, программа MSC.Nastran не предоставляет пользователю широких возможностей доступа к результатам расчетов, посредством внешнего программного обеспечения. Поэтому применение MSC.Nastran для построения гибридных моделей в среде УМ возможно при совместном использовании УМ и DSMFem, либо при использовании ANSYS в качестве промежуточного конвертора (MSC.Nastran может сохранять данные в нейтральном формате, совместимом с ANSYS и DSMFem).

§ 3.2. Тестирование программы

После разработки программа прошла тестирование с использованием простых моделей гибридных систем. Здесь мы рассмотрим только два примера, основанные на импортируемой из ANSYS балке. В тестах используется модель однородной стальной балки длиной 2 метра, имеющей квадратное сечение со стороной 2 см. Конечно-элементная модель, созданная в ANSYS, содержит 200 пространственных балочных элементов (beam4). Модель включает два интерфейсных узла по концам балки. Рассчитано 12 статических и 20 собственных форм балки, соответствующих низшим частотам с закрепленными интерфейсными узлами.

3.2.1. Частоты закрепленной балки

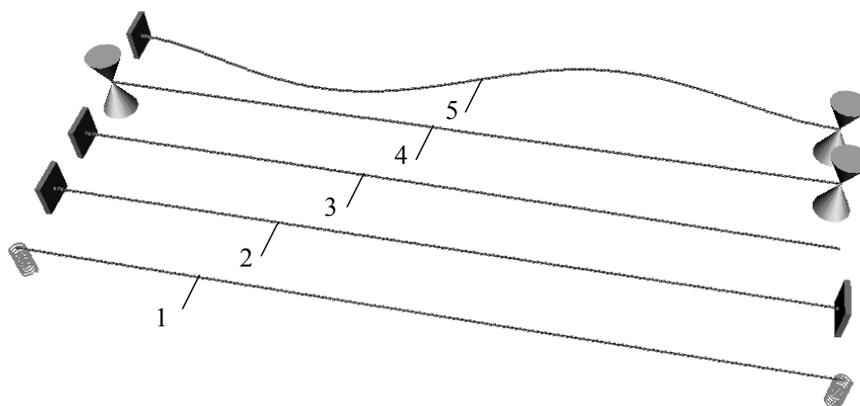


Рис. 3.5. УМ модели упругих балок с различным закреплением. Для пятой модели показана вторая форма колебаний

Данный тест предназначен для проверки корректности построения уравнений движения отдельного упругого тела с использованием различного типа связей в программе UMFem. Построена модель, включающая указанную балку в виде подсистемы 5 раз для исследования ее частот при различных способах закрепления концов:

- 1) свободная балка поддерживаемая по краям пружинами, имеющими пренебрежимо малую жесткость;

- 2) балка с жестко закрепленными двумя концами;
- 3) балка с жестко закрепленным одним концом;
- 4) балка, шарнирно опертая по концам;
- 5) балка, жестко закрепленная на одном конце и шарнирно-опертая на другом.

В табл. 3.1 проведено сравнение расчетных значений низших частот колебаний балок (столбцы Р) с теоретическими значениями (столбцы Т) [1].

Таблица 3.1.

Сравнение расчетных значений частот с теоретическими

Формы	Тип закрепления									
	1		2		3		4		5	
	Т	Р	Т	Р	Т	Р	Т	Р	Т	Р
Ф1	26.67	26.66	26.67	26.66	4.190	4.191	11.76	11.76	18.41	18.38
Ф2	73.45	73.47	73.45	73.49	26.26	26.26	47.05	47.04	59.58	59.54
Ф3					73.55	73.51	105.88	105.82	124.25	124.20
Ф4					144.12	144.02	188.23	188.08		
Ф5							294.10	293.76		
Ф6							423.51	422.82		

Данные результаты показывают, что одна и та же модель упругого тела может быть успешно использована для различных типов закреплений.

3.2.2. Тестовая модель кривошипно-ползунного механизма с упругим шатуном

Рассмотрим в качестве второго тестового примера моделирование динамики кривошипно-ползунного механизма, схема которого представлена на рис. 3.6. Тест предназначен для проверки корректности моделирования упругих тел, подверженных большим перемещениям.

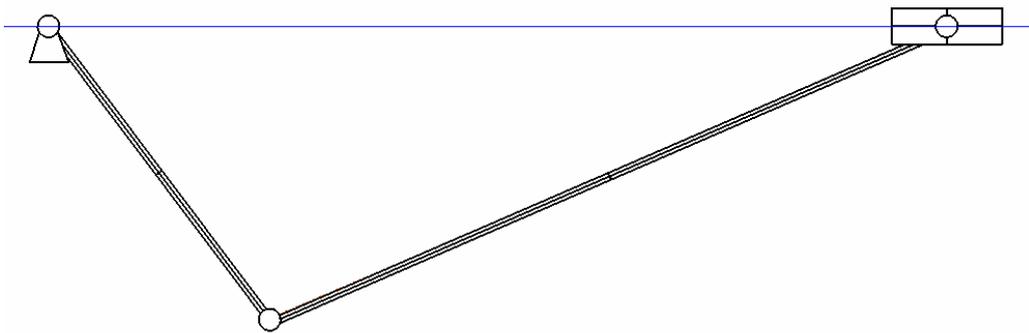


Рис. 3.6. Схема кривошипно-ползунного механизма

Таблица 3.2.

Инерционные параметры тел механизма

Тело	Масса, кг	Момент инерции, кг м ²
Кривошип	7.403	1.333
Шатун	6.28	2.08
Ползун	9.36	

Разработаны три модели кривошипно-ползунного механизма, различающиеся способом представления шатуна. В этих моделях шатун представлен следующим образом:

- 1) абсолютно твердым телом;
- 2) системой одиннадцати абсолютно твердых тел, связанных вращательными шарнирами с внутренними линейными упругостью и диссипацией;
- 3) упругой балкой, описанной выше.

Длина кривошипа 1 м.

Первая модель необходима для того, чтобы выделить эффекты, связанные с упругими свойствами шатуна. Модель 2 позволяет оценить корректность третьей модели, в которой упругое тело совершает большие перемещения. Здесь мы используем тот факт, что балки хорошо моделируются цепочками абсолютно-твердых тел (п.1.2.1).

Движение происходит под действием момента, приложенного к кривошипу

$$M_{AB} = M - \mu\omega_{AB}$$

где $M=100$ Н/м – постоянная составляющая момента, ω_{AB} – угловая скорость кривошипа, $\mu = 10$ Нс/м – коэффициент в диссипативной составляющей момента.

Результаты моделирования представлены на рис. 3.7-3.9. Результаты, полученные с использованием первой модели, обозначены цифрой 1, второй модели – цифрой 2, третьей модели – цифрой 3.

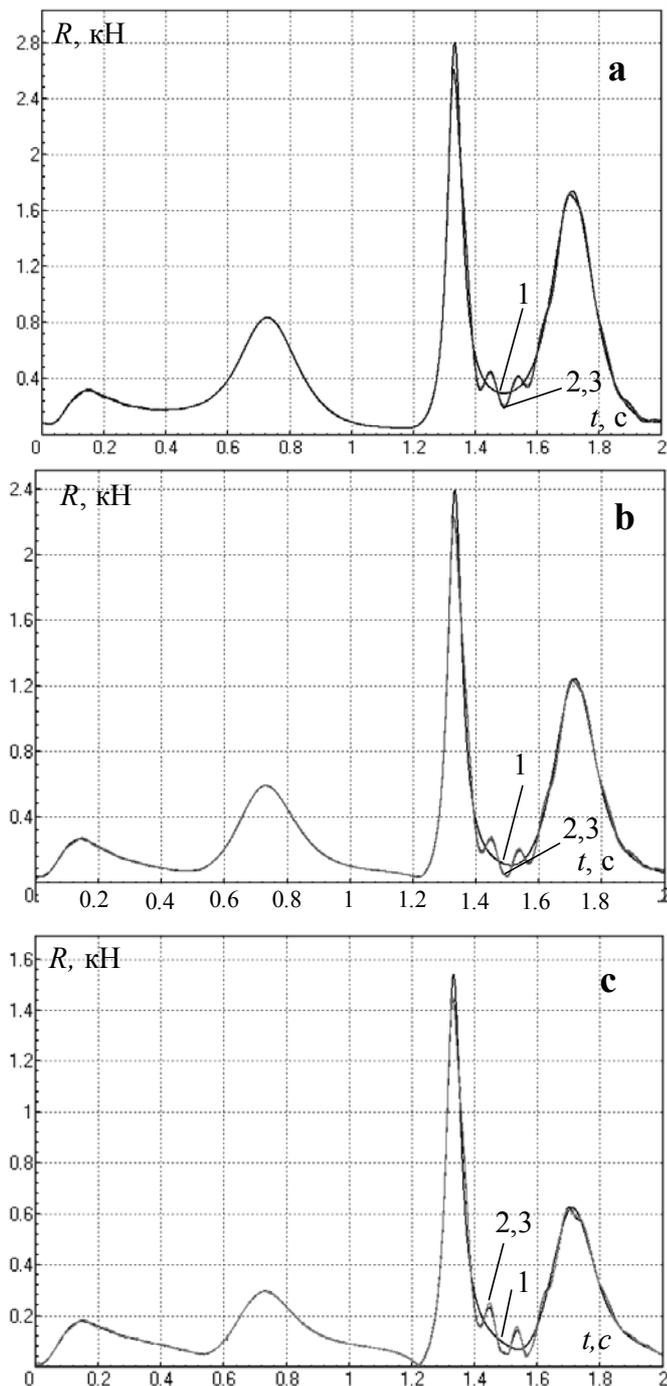


Рис 3.7. Модуль сил реакций в шарнирах: кривошип-стойка (а), кривошип-шатун (b), шатун-ползун (с)

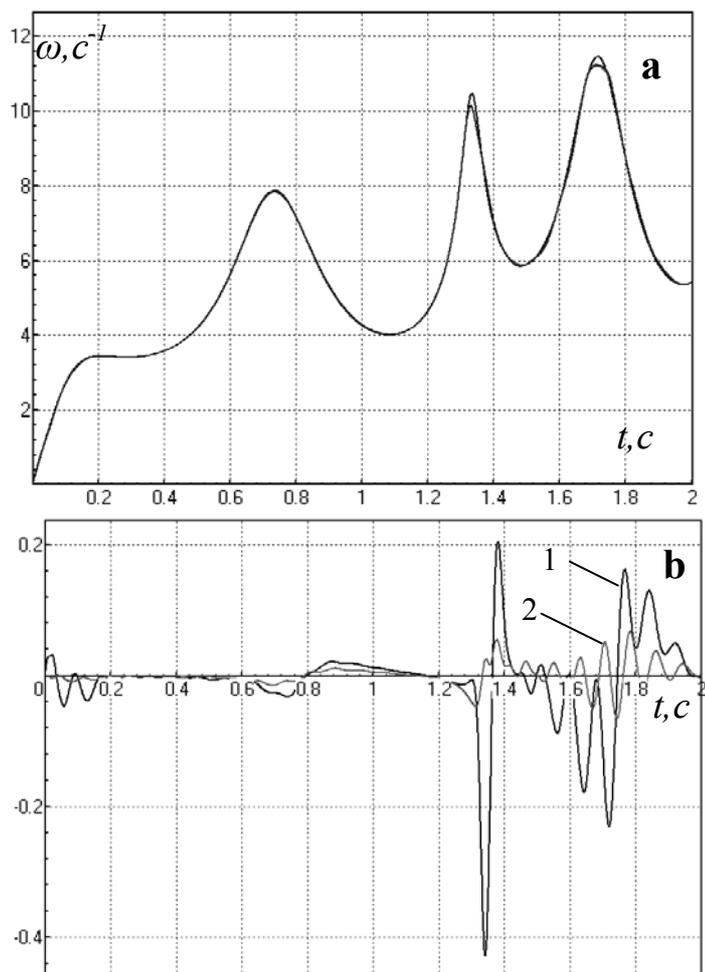


Рис 3.8. Угловая скорость кривошипа в зависимости от времени (а); разность между угловыми скоростями (б): 1 – модели 3 и 1, 2 – модели 3 и 2

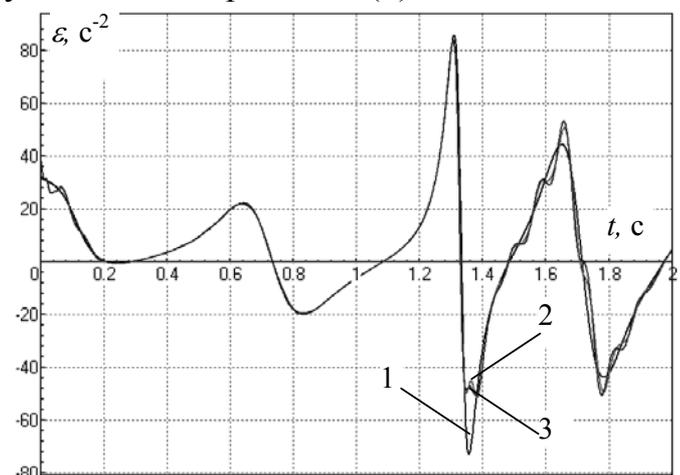


Рис. 3.9. Угловое ускорение кривошипа

Таким образом, модели 2 и 3 показали близкие результаты, что свидетельствует о корректности применения разработанной методики для случая больших перемещений упругих тел.

§ 3.3. Тестовое моделирование динамики автомотрисы АС4

Моделирование динамики автомотрисы проведено с целью оценки эффективности применения разработанной методики для исследований динамики железнодорожных экипажей. В качестве объекта исследований выбрана автомотриса служебная АС4, выпускавшаяся Людиновским тепловозостроительным заводом. В ходе исследований предполагалось выделить динамические характеристики, на которые влияет учет упругих свойств кузова.

Назначение и краткое описание конструкции автомотрисы АС4

Служебная автомотриса предназначена для доставки механизированных бригад монтеров пути и путевого инструмента к месту работы, энергоснабжения сварочных работ, доставки материалов верхнего строения пути к месту работы, а также использования в качестве тяговой единицы. Автомотриса имеет двухосную конструкцию с приводом от двигателя, установленного через амортизаторы на раме автомотрисы. Привод осуществляется через гидropередачу, которая крепится на четыре опоры, расположенные на раме.

К раме автомотрисы привариваются две одинаковые кабины. Кузов имеет конструкцию типа подкрепленной оболочки с большим числом стоек и крепится на раме болтами. Контакт кузова с кабиной происходит через резиновые прокладки, прижатые специальными накладками.

Модель автомотрисы

Разработана гибридная модель (рис. 3.12), включающая три подсистемы:

- 2 одинаковые твердотельные подсистемы «колесная пара» (рис.3.10);
- упругую подсистему «кузов» (рис. 3.11).

Подсистема «колесная пара» взаимодействует с упругим «кузовом» посредством четырех линейных упругих силовых элементов, а также двух нелинейных диссипативных элементов, моделирующих фрикционные гасители.

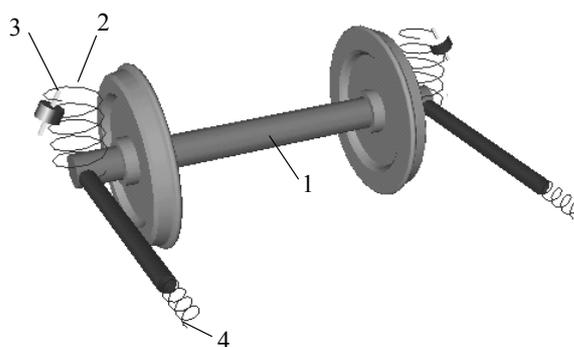


Рис 3.10. Твёрдотельная подсистема «колесная пара». 1 – колесная пара, 2,4 –внешние линейные упругие силовые элементы, 3 – внешний нелинейный диссипативный элемент

Упрощенная конечно-элементная модель кузова включает 1273 узла, 2478 стержневых и пластинчатых конечных элементов, 7474 степеней свободы. Двигатель, гидротрансмиссия и другие массивные элементы оборудования АС4 учитывались массами, помещенными в узлы конечно-элементной схемы.

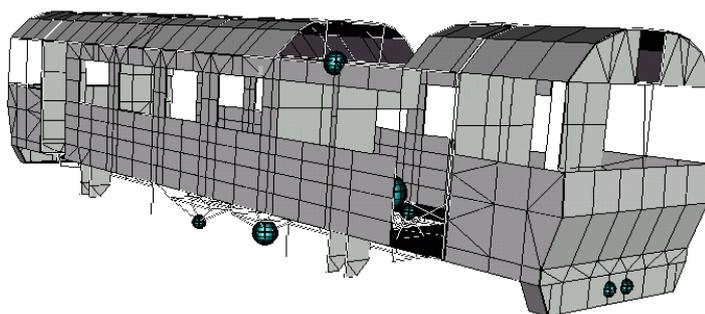


Рис. 3.11. Упрощенная схема МКЭ кузова

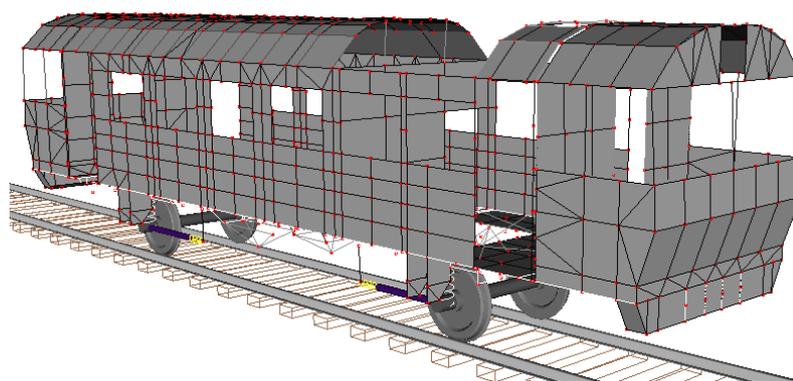


Рис. 3.12. Гибридная модель автомотрисы АС4

Силовые воздействия на кузов, возникающие в результате работы оборудования не учитывались. Это соответствует режиму движения автомотрисы с вы-

ключенным двигателем и отсоединенными карданными валами. Движение моделируется с учетом сил крива в контакте колес с рельсами и неровностей путевой структуры.

Моделирование

Движение отдельного экипажа в кривой описывается в неинерциальной системе координат, относительно которой все элементы совершают малые движения. Кроме того, модель экипажа не содержит шарнирные соединения упругих и твердых тел (имеются только силовые взаимодействия). Для таких случаев корректным является метод редуцирования набором собственных форм. Особенности движения в кривой учитываются приложением к каждому узлу кузова сил инерции, зависящих от скорости, угловой скорости и углового ускорения экипажа (силы инерции от переносного ускорения).

Проведено моделирование движения автотрисы в прямых и кривых участках пути со скоростями от 20 до 100 км/ч. Основной задачей исследований была оценка влияния количества учитываемых собственных форм упругого кузова на точность вычисляемых величин, а также определение динамических параметров, на точность расчета которых влияет учет упругих свойств кузова.

В таблице 3.3 представлены результаты расчета низших собственных частот и форм колебаний кузова.

Таблица 3.3.

Низшие частоты и формы колебаний автотрисы АС4

№ п.п.	Собственная частота	Вид собственной формы
1	0.92	Нижняя боковая качка
2	1.04	Галопирование
3	1.15	Виляние
4	1.3	Подпрыгивание
5	1.37	Продольное перемещение
6	1.51	Верхняя боковая качка
7	2.98	Крутильная
8	6.02	Изгибная
9	6.32	Поперечный изгиб с кручением

Первые 6 форм соответствуют движению кузова как абсолютно твердого тела.

Закономерности, установленные в результате моделирования, продемонстрируем на примере сравнения значений динамических величин, полученных с применением трех моделей, в которых упругий кузов представлен наборами из шести, двадцати четырех и семидесяти собственных форм, соответствующих низшим собственным частотам. Двадцать четвертая собственная частота равна 12 Гц, семидесятая – 22 Гц. Тот факт, что 36 собственных частот лежат в диапазоне 10 Гц, неблагоприятно сказывается на эффективности моделирования. Ниже мы кратко на этом остановимся.

На приведенных графиках результаты моделирования с использованием шести форм для представления кузова обозначаются цифрой 1, двадцати четырех форм – цифрой 2, семидесяти форм – цифрой 3.

1. Расчет поперечных сил, действующих на раму кузова со стороны колесной пары (*рамные силы*) при движении в кривой радиусом 300 метров без учета неровностей (рис. 3.13). Скорость движения 80 км/ч.

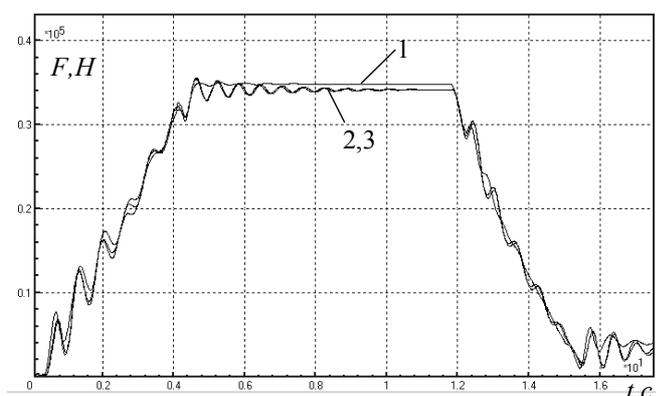


Рис. 3.13. Значения рамных сил при движении в ровной кривой $R=300$ м

Анализируя графики, изображенные на рис. 3.13, можно сделать два основных вывода: во-первых, учет упругих форм кузова оказывает незначительное влияние на значения рамных сил; во-вторых, это влияние оказывают только формы, соответствующие низшим собственным частотам упругого кузова (разница между графиками 2,3 практически незаметна).

2. Второй вывод предыдущего пункта распространяется на случай движения в кривых с учетом неровностей. Однако влияние упругих форм кузова на значения рамных сил более заметно. Оно оценивается по среднеквадратическим отклонениям (СКО) значений рамных сил после удаления низкочастотного тренда (рис. 3.14, 3.15).

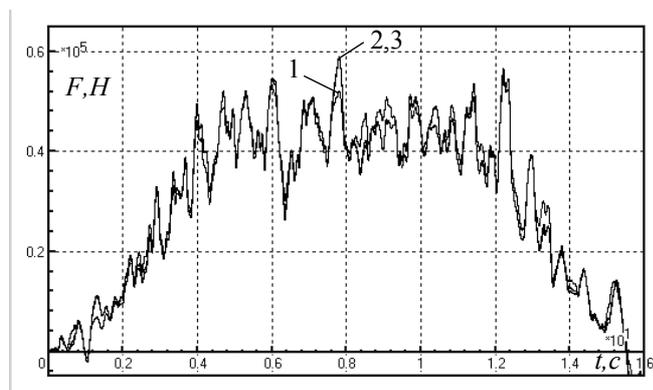


Рис. 3.14. Значения рамных сил при движении в кривой $R=300$ м с учетом неровностей

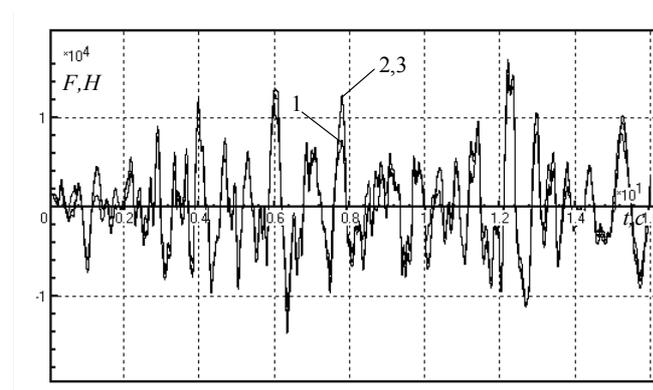


Рис 3.15. Значения рамных сил при движении в кривой $R=300$ м с учетом неровностей после удаления низкочастотного тренда

Для шести форм значение СКО равняется 4483 Н; для двадцати четырех форм – 4922 Н (разница с моделью на основе 6 форм 9.8 %), для семидесяти форм 5004 Н (11.6 %).

3. Расчет виброускорений.

На рис. 3.16 приведены графики СКО виброускорений в зависимости от скорости при движении в прямой с учетом неровностей пути.

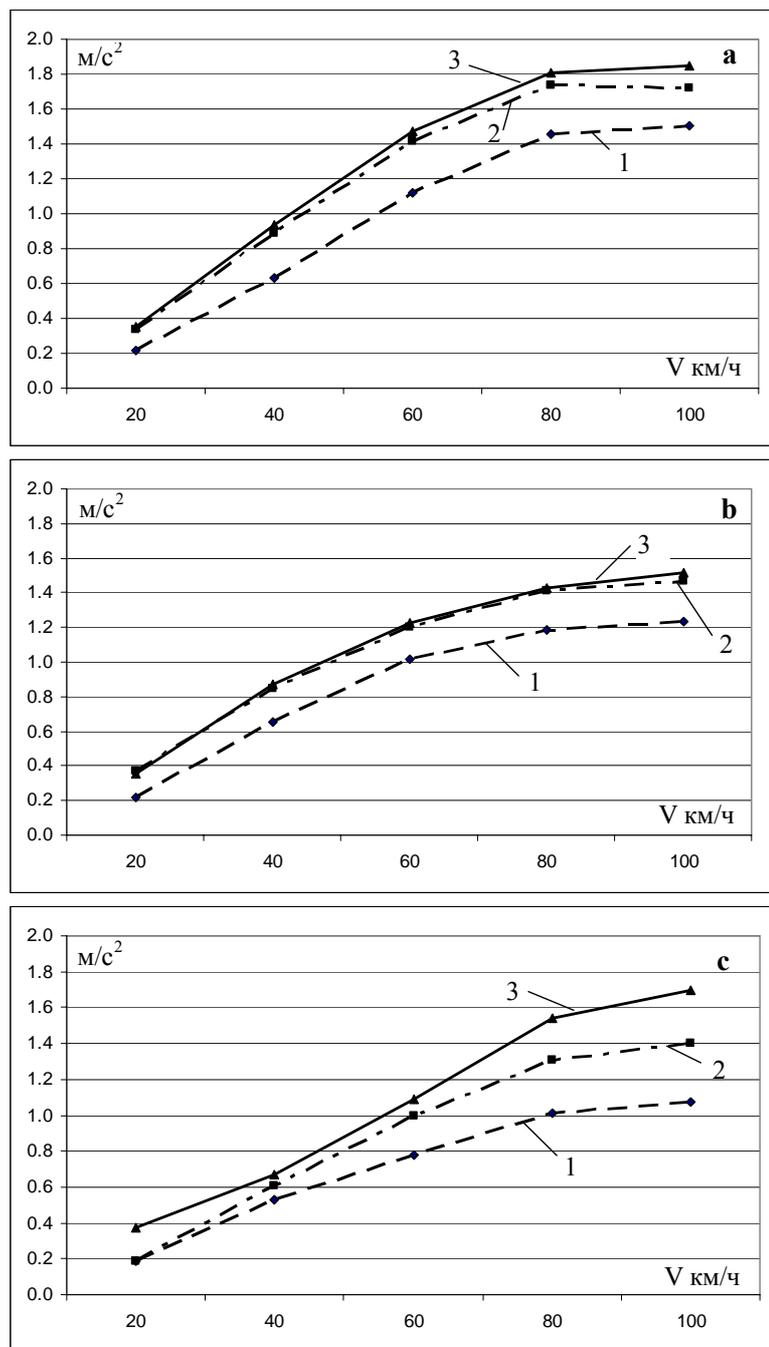


Рис. 3.16. СКО виброускорений рамы кузова под передней кабиной (а), под задней кабиной (b), под центром салона (с)

Учет форм, соответствующих частотам более высокого порядка, может заметно уточнить результаты расчетов. Разница в значениях СКО виброускорений под серединой салона при скорости 100 км/ч, полученных с применением второй и третьей моделей, составляет 0.355 м/с^2 (22.8%). Под кабинами уточнение менее существенно: под передней – 0.122 м/с^2 (7%), под задней – 0.052 (3.5%).

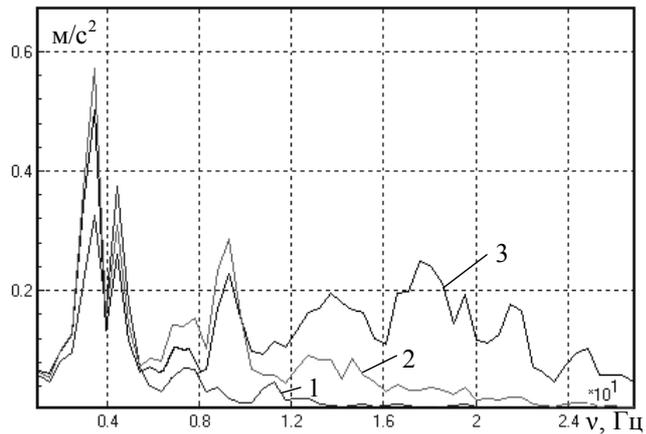


Рис. 3.17. Спектральная плотность мощности виброускорений под серединой салона при движении со скоростью 100 км/ч

Кроме уточнения абсолютных значений СКО, учет большего числа форм позволяет расширить частотный диапазон спектра виброускорений, доступный для анализа (рис. 3.17).

4. В некоторых случаях эффективность моделирования упругих частей конструкций можно повысить путем исключения форм, не оказывающих существенного влияния на точность расчета исследуемых параметров. Например, среди собственных форм автотранспорта, на основе которых построены описанные выше модели, существуют формы, соответствующие колебаниям стенок кузова и кабин. Очевидно, что такие формы не окажут влияния на значения рамных сил или виброускорений точек рамы.

Их можно исключить на этапе компоновки составного объекта, как указывалось при описании программной реализации методики. Однако в общем случае исключать форму из набора, представляющего упругую подсистему нужно с большой осторожностью, поскольку ее влияние может сказаться, например, при изменении режима внешних воздействий.

Количественную оценку влияния формы на значение параметра можно дать на основе анализа разложения решения по формам колебаний. Например, соотношение для расчета вертикальных виброускорений узла K упругого кузова в данном случае имеет следующий вид:

$$a_{kz} = \sum_j h_j^{kz} \ddot{w}_j,$$

где h_j^{kz} – элемент вектора-столбца собственной формы с номером j , соответствующий координате z узла K . На рис. 3.18 приведена диаграмма, отражающая СКО каждого слагаемого указанной суммы для точки под серединой салона третьей модели кузова. Очевидно, что не более половины из числа форм, используемых для построения модели, влияют на точность расчета вертикальных виброускорений.

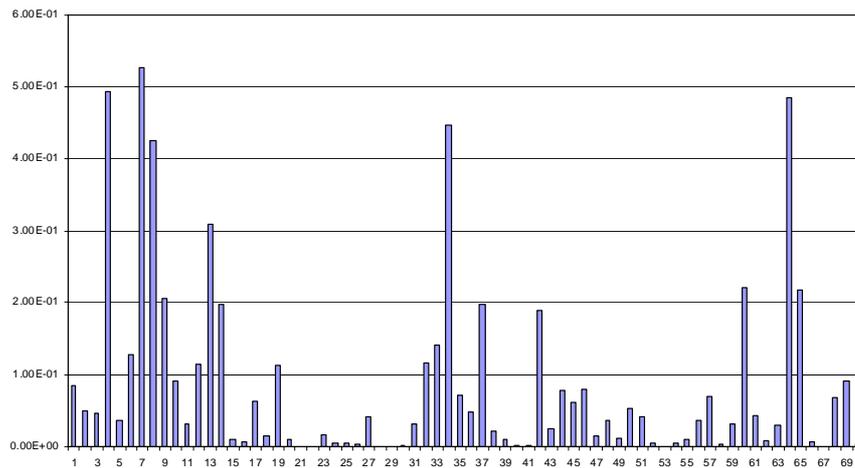


Рис. 3.18. СКО виброускорений рамы под серединой салона, представленное разложением в ряд по формам колебаний

§ 3.4. Исследование вибраций рамы щебнеочистительной машины ЩОМ 1200

Моделирование динамики ЩОМ 1200, результаты которого приводятся в настоящем параграфе проведено на этапе проектирования машины. Техническая документация, на основе которой разработана гибридная модель, представлена ГУП ВНИКТИ МПС России г. Коломна.

В качестве щебнеочистительных устройств на машине ЩОМ 1200 используются два грохота, каждый из которых посредством четырех упругих опор устанавливается на раме. Конструкция вибропривода грохота включает дебалансный вал, установленный посредством подшипников в корпусе грохота. Ось вала проходит через центр тяжести грохота. С наружной стороны корпуса на консоли вибровала установлено по два дебаланса: основной и дополнительный, имеющие возможность поворота относительно друг друга с фиксацией через 15° . Амплитуда колебаний грохотов регулируется посредством изменения угла расстановки дебалансов. Инерционные параметры дебалансов вибратора грохота (рис.3.19) представлены в таблице 3.4.

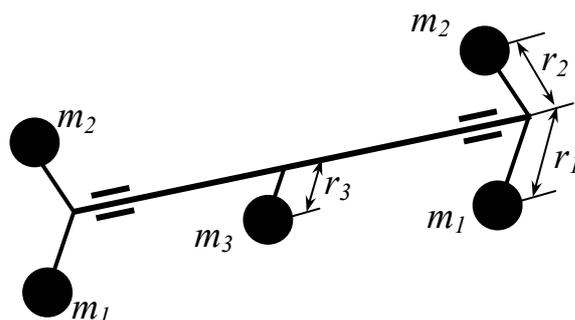


Рис. 3.19. Схема дебалансов

Таблица 3.4.

Инерционные параметры дебалансов вибратора грохота

m_1 , кг	r_1 , м	m_2 , кг	r_2 , м	m_3 , кг	r_3 , м
129.6	0.3	48.6	0.3	257	0.03

Общая расчетная масса грохота составляет 6315 кг. Очищаемый материал учитывается присоединенными массами, расчетные значения которых представлены ВНИКТИ. Амплитуда колебаний грохотов составляет 4.8-7.5 мм.

Целью исследований является определение параметров вибраций рамы в режимах разбега, выбега и рабочем режиме грохотов в зависимости от углов поворотов дополнительных дебалансов относительно основных и смещения фазы вращения вала заднего грохота относительно вала переднего.

Компьютерная модель объекта построена в соответствии с методикой, изложенной в главе 2. Упругая подсистема №1 включает раму, обустройство рамы ЩОМ 1200, а также рамы грохотов (рис.3.21). Схема МКЭ содержит: 1990 узлов, 2485 стержневых и пластинчатых конечных элементов, 11940 степеней свободы. Подсистема №1 взаимодействует с базовой СК посредством четырех упругих и четырех диссипативных линейных элементов, которые моделируют рессорное подвешивание машины. Конвейеры, привод тележки и другое оборудование, прикрепляемое к раме, учитывались сосредоточенными массами, помещенными в узлах схемы, соответствующих местам крепления. Математическая модель подсистемы №1 построена на основе двадцати пяти собственных форм, соответствующих низшим собственным частотам в диапазоне от 2 до 28 Гц. Грохоты представляются идентичными подсистемами №2 и №3, состоящими из семи твердых тел (рис. 3.20). Подсистемы, представляющие грохоты, содержат по четыре упругих и четыре диссипативных внешних силовых элементов, посредством которых они взаимодействуют с подсистемой №1.

Общий вид гибридной модели представлен на рис. 3.22.

Исследовались следующие режимы вращения дебалансных валов грохотов.

1. Разбег. Время разбега 5 сек.
2. Рабочий режим вращения грохотов с частотой 14 об/сек.
3. Выбег грохотов. Время выбега 10 сек.

Варьировались два параметра с шагом 30° :

- φ° – смещение фаз вращения дебалансных валов грохотов;

- α° – поворот дополнительных дебалансов относительно основных. Этот параметр полагался равным для обоих грохотов.

Исследования параметров вибрации проводились в восьми контрольных точках, расположенных на верхней плоскости правой по ходу движения несущей балки рамы ЩОМ 1200 на расстояниях 2.35, 5.25, 8.70, 11.70, 14.70, 18.25, 21.15, 23.50 метров от заднего конца рамы.

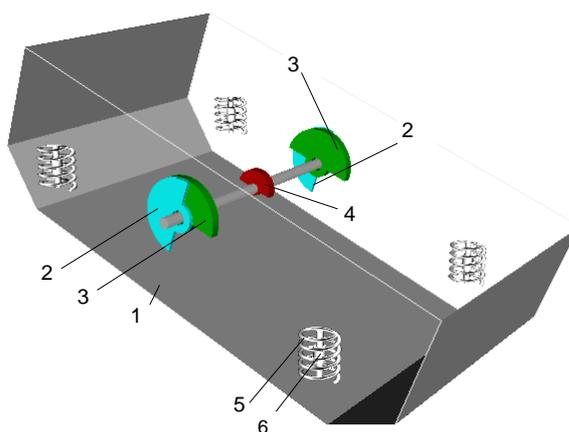


Рис. 3.20. Представление грохота подсистемой твердых тел. 1 – корпус, 2 – дополнительные дебалансы, 3 – основные дебалансы, 4 – дебаланс вала, 5 – упругий элемент, 6 – диссипативный элемент

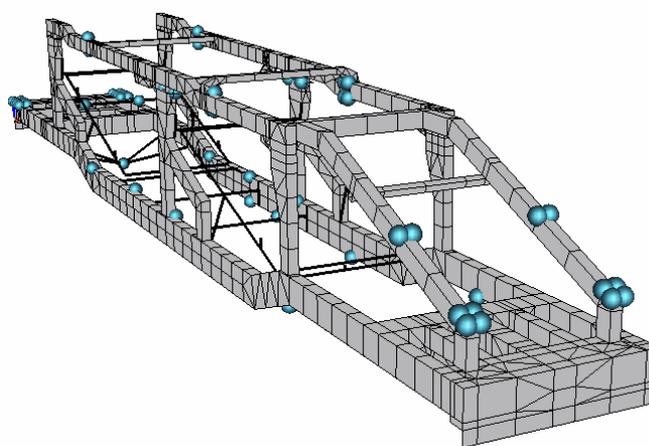


Рис. 3.21. Схема МКЭ упругой подсистемы №1

В результате проведенных исследований выяснилось, что самым неблагоприятным режимом является выбег грохотов, при этом значения амплитуд вертикальных вибраций преобладают над значениями продольных. Амплитуды поперечных вибраций пренебрежимо малы. Максимальные значения парамет-

ров вертикальных вибраций зафиксированы в точке 4 в режиме выбега грохотов при следующих значениях (рис. 3.23):

- для вибраций $\alpha=0^\circ$, $\varphi = 0^\circ$;
- для виброускорений $\alpha=0^\circ$, $\varphi^\circ = 150^\circ$.

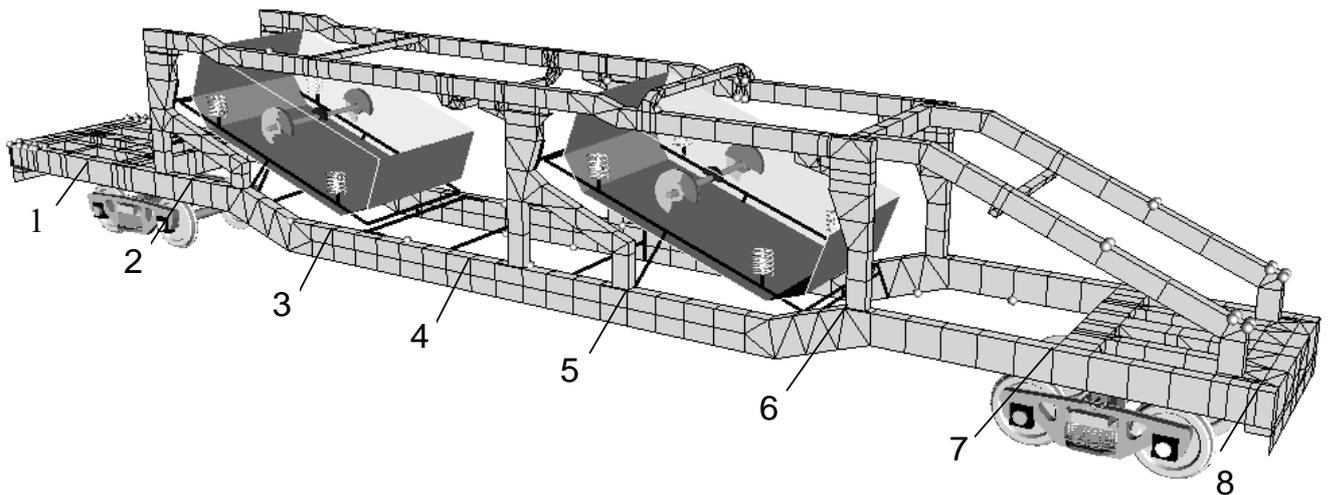


Рис. 3.22. Гибридная модель щебнеочистительного модуля ЩОМ 1200. Расположение контрольных точек

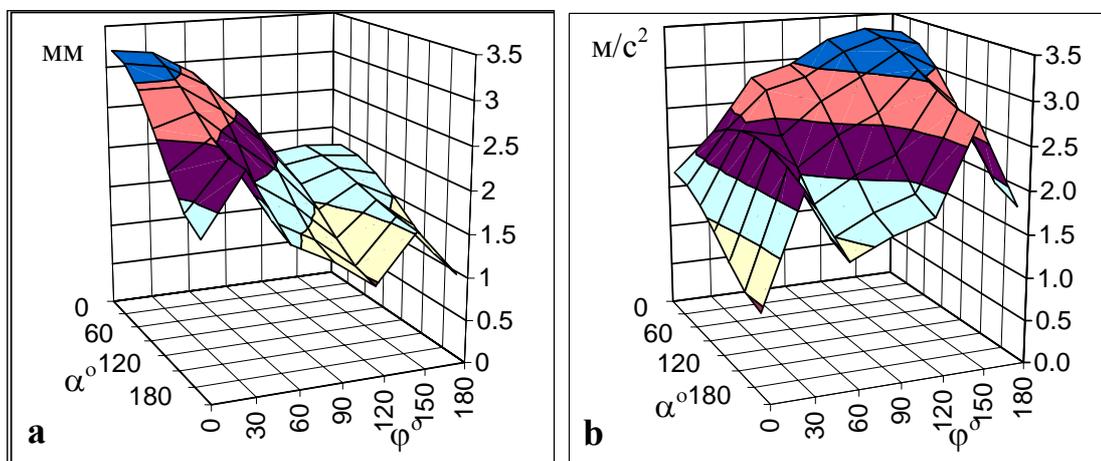


Рис. 3.23. Амплитуды вертикальных вибраций (а) и СКО вертикальных виброускорений (б) в контрольной точке 4 в режиме выбега грохотов

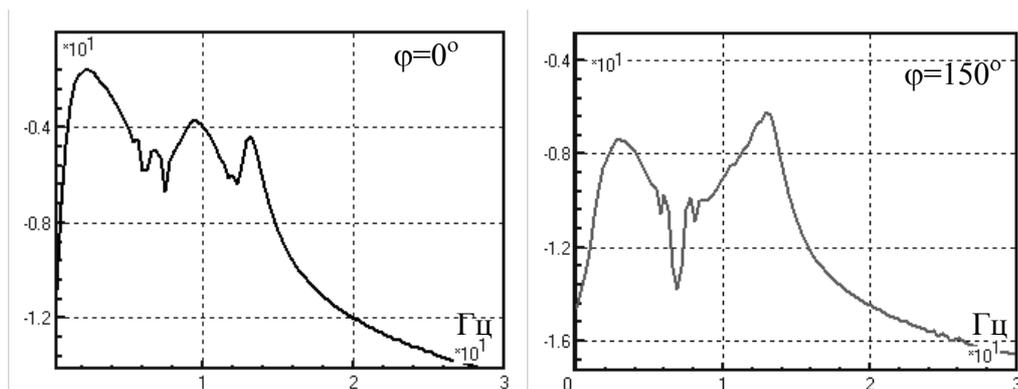


Рис. 3.24. Спектральная плотность мощности вибраций в контрольной точке 4 в режиме выбега грохотов

Объяснение полученных результатов проведем посредством анализа графиков спектральной плотности мощности вибраций (рис. 3.24) и представления результатов интегрирования в виде разложения по формам колебаний рамы.

Проведенный анализ показал, что параметры вертикальных вибраций рамы под воздействием со стороны грохотов определяются в основном тремя формами колебаний с частотами 2.62 Гц, 9.53 Гц и 13.00 Гц. Формы, соответствующие частотам 9.53 Гц и 13.00 Гц, представлены на рис. 3.25. Частота 2.62 Гц соответствует колебаниям ЩОМ 1200 на подвеске. Графики спектральной плотности вертикальных вибраций имеют пики приблизительно на указанных частотах.

Таблица 3.5.

Характеристики вибраций, соответствующие отдельным формам колебаний

Смещение фаз, град	Частота, соответствующая компоненте, Гц	Максимальная амплитуда, мм	СКО, м/с ²
0	2.62	3.1	0.96
0	9.53	0.73	0.25
0	13.00	0.49	0.13
150	2.62	0.37	0.10
150	9.53	0.27	0.11
150	13.00	2.45	0.65

В таблице 3.5 приводятся данные о максимальной амплитуде и СКО компонент вертикальных вибраций в точке 4, соответствующих вращению валов грохотов со смещением фаз 0° и 150° . Поворот дебалансов 0° .

Очевидно, что с ростом смещения фаз вращения грохотов растет влияние собственной формы, соответствующей 13 Гц, и достигает максимума при значении $\varphi^\circ = 150^\circ$.

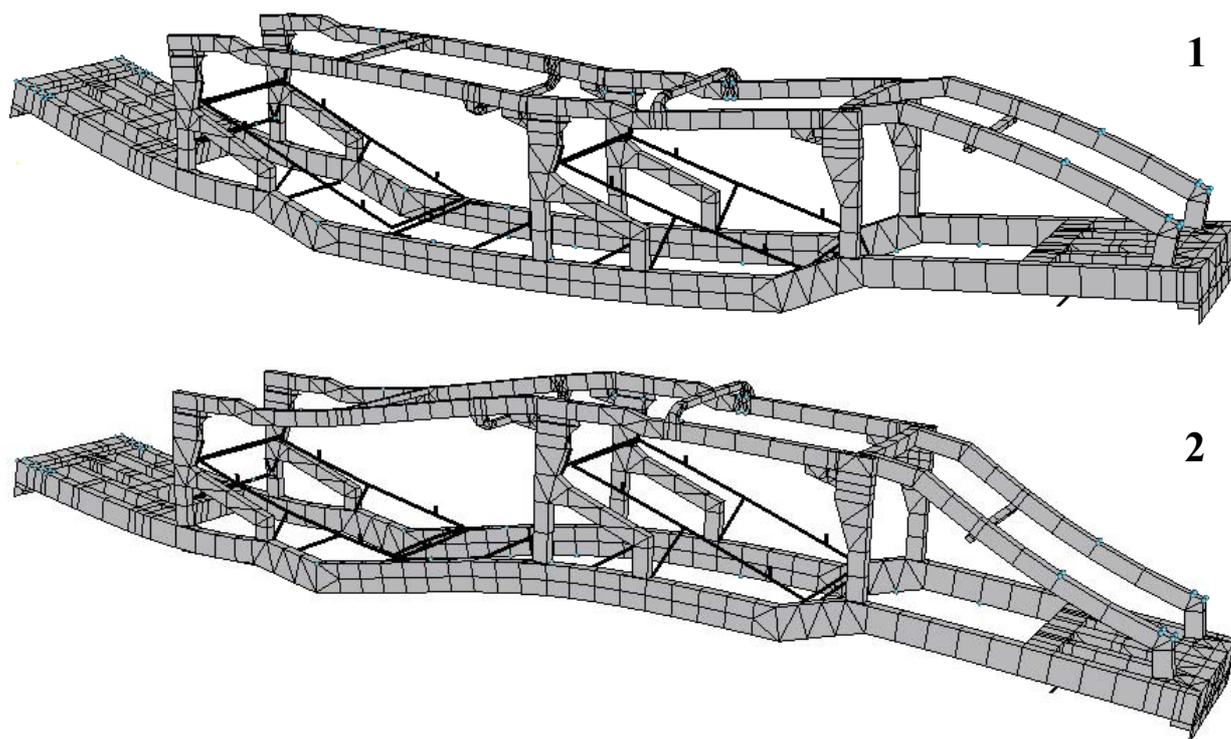


Рис. 3.25. Изгибные формы колебаний рамы:
1 – частота 9.53 Гц, 2 – частота 13.00 Гц.

Таким образом, приведенный пример моделирования показал высокую эффективность разработанной методики для исследования динамики сложных технических систем. Показано, что для исследования параметров вертикальных колебаний рама может быть адекватно представлена тремя собственными формами.

§ 3.4. Выводы по результатам главы

В третьей главе рассмотрена программная реализация разработанной методики исследований динамики гибридных систем в виде программного модуля UMFem. Модуль реализует всю последовательность действий, необходимых для исследования упругих тел в составе гибридной модели:

- представление объекта в терминах МКЭ;
- понижение порядка системы уравнений движения упругой подсистемы на основе модального анализа;
- включение упругой подсистемы в состав объекта на этапе его компоновки;
- численный анализ уравнений движения составного объекта.

К настоящему моменту возможности модуля в части представления объекта конечно-элементной схемой ограничены узким набором стержневых и пластинчатых конечных элементов. Для расширения класса решаемых задач разработаны интерфейсы с широко распространенным программным пакетом МКЭ ANSYS, а также программным комплексом DSMFem.

Тестирование программы с использованием простых моделей показало корректность разработанной методики.

Проведено тестовое моделирование динамики автомотрисы АС4 при различных режимах движения с учетом неровностей. Основными задачами теста являлись оценка эффективности применения разработанной методики для исследований динамики железнодорожных экипажей, а также определение динамических параметров, на точность расчета которых влияет учет упругих свойств кузова. Построены гибридные модели, в которых упругий кузов представлен различным числом собственных форм, соответствующих низшим собственным частотам. Показано существенное влияние учета упругих свойств кузова на значения СКО и спектральный состав виброускорений, измеряемых на раме. При использовании семидесяти собственных форм для представления

кузова уточнение СКО виброускорений на раме под серединой салона составляет до 70 % по сравнению с твердотельной моделью. Влияние упругих форм кузова на расчет рамных сил менее значительно.

В заключение главы приведен пример использования методики и разработанного программного обеспечения для решения прикладной задачи – исследований вибраций рамы щебнеочистительной машины ЩОМ 1200 при различных режимах работы грохотов. В результате моделирования выявлены значения варьируемых параметров: углов расстановки дебалансов грохотов и смещения фаз вращения дебалансных валов, при которых значения СКО виброускорений и амплитуды вибраций имеют максимальные значения. Выявлены формы колебаний рамы, оказывающие основное влияние на значения исследуемых параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлена методика компьютерного моделирования динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям. Она реализована в виде модуля к программному комплексу «Универсальный механизм».

Сформулируем основные результаты работы.

1. Разработана методика моделирования систем, состоящих из абсолютно твердых и деформируемых тел, позволяющая проводить исследования динамики сложных технических систем в уточненной постановке. Методика позволяет получать более достоверные спектральные оценки динамических процессов, в частности, при компьютерном моделировании динамики рельсовых экипажей. Методика также позволяет моделировать упругими телами звенья механизмов, совершающие геометрически нелинейные движения.

2. Построены нелинейные уравнения движения упругого тела при условии больших перемещений присоединенной системы координат. Для уменьшения числа степеней свободы в результирующей модели реализован модальный подход. Наиболее эффективная методика предполагает расчет комбинации собственных и статических форм упругого тела. Показана обоснованность упрощений уравнений движения, связанных с приложением сил инерции в узлах конечно-элементной сетки.

3. Модифицирован метод подсистем для возможности совмещения упругих и абсолютно твердых тел в составе гибридной модели. Модификация позволяет учитывать каждое упругое тело в виде отдельной подсистемы с автоматизированным формированием элементов уравнений движения, сил взаимодействия с другими подсистемами, уравнений связей, а также визуального отображения движения.

4. Разработан новый метод решения систем линейных алгебраических уравнений большого размера, который применяется на этапе поиска собственных форм упругих тел методом Ланцоша. Разработанный метод позволяет до пяти

раз сократить объем оперативной памяти ЭВМ необходимой для поиска собственных форм, что позволяет решать без использования жесткого диска задачи с размером матрицы до 250 000. С использованием данного метода рассчитаны низшие собственные частоты и формы колебаний кузова тепловоза ТЭП70 (число степеней свободы 164 088). Предложен эффективный алгоритм уменьшения объема профиля матриц. Применение алгоритма к моделям упругого кузова автотрисы АС4 и рамы щебнеочистительной машины ЩОМ 1200, приведенным в работе, позволяет уменьшить объем профиля матриц жесткости от трех до пяти раз.

5. Разработан модуль UMFem для программного комплекса «Универсальный механизм», позволяющий автоматизировать исследования динамики гибридных систем тел, соединенных шарнирами и силовыми элементами произвольных типов. Модуль автоматизирует подготовку моделей упругих тел и позволяет проводить их численный анализ. Разработанная программа не имеет аналогов среди российских программных продуктов. Модуль включает также возможность построения конечно-элементных моделей конструкций с использованием балочных и пластинчатых конечных элементов, а также проводить расчет частот и форм упругих тел методом Ланцоша.

6. Разработаны интерфейсы с программами МКЭ ANSYS и DSMFem, позволяющие строить гибридные системы в ПК УМ на основе конечно-элементных моделей, разработанных в этих программах. Интерфейс позволяет формировать данные, необходимые для построения гибридных моделей, в специально разработанном формате и поддерживает большую часть конечных элементов, доступных в программах. Благодаря данному интерфейсу, модуль моделирования гибридных систем становится доступным широкому кругу инженеров-исследователей.

7. Проведенное тестирование показало корректность разработанных алгоритмов и программного обеспечения.

8. С использованием модуля UMFem создана конечно-элементная модель кузова автотрисы АС4, рассчитаны низшие частоты и формы колебаний, на

основе которых построена гибридная модель экипажа. Проведено тестовое исследование динамики данной модели при движении в прямых и кривых. Показано, что учет семидесяти собственных форм позволяет уточнить значения СКО виброускорений на раме кузова до 70 % по сравнению с твердотельной моделью. При этом учет высокочастотных составляющих значительно уточняет спектральный состав динамических характеристик. Кроме того, учет собственных форм, соответствующих низшим частотам, позволяет уточнить значения рамных сил при движении в кривых с учетом неровностей.

9. С использованием модуля UMFem создана конечно-элементная модель рамы проектируемой щебнеочистительной машины ЩОМ 1200 и соответствующая гибридная модель, включающая грохоты. На основе данной модели решена прикладная задача исследования вибраций рамы. Проведенный анализ показал, что в заданном диапазоне параметров грохотов и режимов их работы значения виброускорений лежат в допустимых пределах. Результаты исследований переданы в ФГУП ВНИКТИ МПС.

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М: Наука, 1968.
2. Верещагин А.Ф. Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Инженерная кибернетика, вып. 6, – С. 65-70.
3. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава, М.: Транспорт, 1986.
4. Воеводин В.В. Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления, М: Наука, 1984.
5. Виттенбург Й., Динамика систем твердых тел, - М: Мир, 1980.
6. Галлагер Р., Метод конечных элементов. Основы-М.: Мир,1984.
7. Деммель Дж., Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения/ Пер. с англ. Икрамова Х.Д. – М.: Мир, 2001.
8. Дмитроченко О.Н. Методы моделирования динамики гибридных систем тел с учётом геометрической нелинейности // Динамика, прочности и надёжность транспортных машин / Сб. тр. Под ред. Б.Г. Кеглина. – Брянск: БГТУ. – 2001. – С. 24-34.
9. Дмитроченко О.Н., Михайлов Н.Н., Погорелов Д.Ю. Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем твёрдотельными конечными элементами // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. научн. трудов под ред. В.И.Сакало. – Брянск: БГТУ, 1998. – С. 33-39.
10. Дмитроченко О.Н., Погорелов Д.Ю. Упругие балочные элементы в системах твёрдых тел // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. тр. под ред. В.И. Сакало. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 18-27.
11. Дмитроченко О.Н., Погорелов Д.Ю. Задачи с большими перемещениями и конечные элементы, сохраняющие постоянство матриц в формулировке абсолютных узловых координат // Сб. докл. Межд. конгр. «Механика и трибология транспортных систем-2003», т. 1. – Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов-на-Дону, 2003. – С. 299-305.
12. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Решение некоторых модельных задач механики с использованием программного комплекса «Универсальный механизм». Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1993, №72.
13. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю., «Универсальный механизм» – комплекс программ моделирования динамики систем твердых тел. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1993, №77.
14. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Некоторые алгоритмы автоматизиро-

ванного синтеза уравнений движения системы твердых тел. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1993, №84.

15. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. О численных методах моделирования движения системы твердых тел. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1994, №12.

16. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.– М.: Мир, 1975.

17. Кобищанов В.В., Антипин Д.Я., Забелин А.Л. Оценка динамической нагруженности несущих конструкций кузовов вагонов // Безопасность движения поездов. Труды научно-практической конференции. – М.: МИИТ, 2003. – С. IV41.

18. Леонтьев В. А. Оптимальная дискретизация распределённой упругости в расчётных моделях звеньев манипулятора // Тр. 1-й научн.-техн. конф. «Роботы и манипуляторы в экстремальных условиях». – СПб.: СПбДНТП, 1992. – С. 100-106.

19. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб. Пособие для университетов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

20. Мейснер К. Алгоритм многосвязного объединения для метода жесткостей структурного анализа. Ракетная техника и космонавтика, 1968, №11.

21. Михальченко Г.С. Динамика ходовой части перспективных локомотивов – М.: МАМИ, 1982.

22. Михальченко Г.С. Погорелов Д.Ю., Симонов В.А., Совершенствование динамических качеств подвижного состава железных дорог средствами компьютерного моделирования // Тяжелое машиностроение 12, 2003, С. 2-5.

23. Михеев Г.В., Некоторые результаты исследований гибридных моделей механических систем, построенных методом подсистем с учетом упругости элементов конструкции // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. тр. под ред. Сакало В.И., Брянск, БГТУ, 2000, – С. 28-34.

24. Михеев Г.В., Применение гибридных моделей для исследования динамики железнодорожных экипажей // Вісник Східно-українського національного університету імені Володимира Даля №6(52), – С. 32-38, СХУ, 2002.

25. Михеев Г.В. Некоторые приемы, используемые для построения эффективных гибридных моделей технических систем// Сборник докладов международного конгресса "Механика и трибология транспортных систем - 2003" сентябрь 2003 г., в 2-х томах. Том 1. Ростовский государственный университет путей сообщения. Ростов-на-Дону, 2003. – С. 150-154.

26. Михеев Г.В. Некоторые моменты технологии построения и примеры практического применения гибридных математических моделей для исследования динамики железнодорожных транспортных

средств // Безопасность движения поездов. Труды научно-практической конференции. – М.: МИИТ, 2003. – С. IV62.

27. Ольшевский А.А., Прасолов А.П. Исследование свободных колебаний кузова автотрассы АС-4 с использованием комплекса программ МКЭ// Динамика, прочность и надежность транспортных машин: Сб. тр. / Под ред. Б.Г. Кеглина. – Брянск: БГТУ, 1997, – С. 81-84.

28. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учеб. пособие. – Брянск: БГТУ, 1997.

29. Погорелов Д.Ю., Дмитроченко О.Н. Модификации метода отдельных тел для синтеза и решения уравнений движения систем тел // Тез. докл. междунар. конф. стран СНГ «Молодые учёные – науке, технологиям и профессиональному образованию». – М.: 2000, ч.3, – С. 87-90.

30. Погорелов Д.Ю., Дмитроченко О.Н. Моделирование геометрически нелинейных упругих систем на основе твёрдотельной расчётной схемы на примере конвейера с подвесной лентой // Вопросы трансп. машиностр. / Сб.тр.под ред. Г.С. Михальченко. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 94-99.

31. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений – М.: Мир, 1983.

32. Погорелов Д.Ю. О кодировании символьных выражений при синтезе уравнений движения системы твердых тел//Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1993. №6.

33. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций, Л.: Судостроение, 1977.

34. Постнов В.А. (ред.) Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979.

35. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974.

36. Пржеменицкий Е.С., Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур. – Ракетная техника и космонавтика, 1963, №1.

37. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети, алгоритмы. – М.:Мир, 1984.

38. Уилкинсон Д., Райнш У. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Пер. с англ. под ред. Ю.И. Топчельева. – М.: Машиностроение, 1976.

39. Холл Дж., Уатт Дж. (ред.) Современные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979.

40. Ambrósio J.A.C., Pereira M.F.O.S. Flexible multibody dynamics with nonlinear deformations: Vehicle dynamics and crashworthiness applications. – Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesys

and optimization / J. Angeles, E. Zakhariiev (eds.). – (NATO ASI series. Series F, Computer and systems sciences; vol. 161). – pp. 382-420.

41. Bennighof, J.K., and Kaplan, M. F., and Muller, M. B. Extending the Frequency Response Capabilities of Automated Multilevel Substructuring, AIAA Dynamics Specialists Conference, Atlanta, GA, April 2000, to appear.

42. Bennighof, J.K., and Lehoucq, R. B. An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics, submitted to SIAM Journal of Scientific Computing, January 2002.

43. Berzeri M., Shabana A.A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal co-ordinate formulation // Journal of Sound and Vibration 235(4), 2000, pp. 539-565.

44. Campanelli M., Berzeri M., Shabana A. A. Performance of the incremental and non-incremental finite element formulations in flexible multibody problems // Journal of mechanical design. – 2000. – Vol. 122. – P. 498.

45. Craig, R.R., Jr., and Bampton, M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313-1319.

46. Craig, R.R., Jr., and Bampton, M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis: an overview”, AIAA Journal, 2000.

47. Denavit J., Hartenberg R.S. A kinematic motion for lower pair mechanisms based on matrices // Journal of Applied Mechanics 22, 1955, pp. 215-221.

48. Dias J.M.P and Pereira M.S. Sensitivity Analysis of Rigid-Flexible Multibody Systems, Multibody System Dynamics 1, Kluwer Academic Publishers: 303-322, 1997.

49. Dmitrotchenko O.N. Efficient simulation of rigid-flexible multibody dynamics: Some implementations and results // Proceedings of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1, W. Schielen, M. Valášek (Eds.), Prague, 2002, pp. 51-56.

50. Dmitrotschenko O. Dynamik der Borsten rotierender Buerste // Zwischenbericht ZB-097 / Arbeitsbereich Meerestechnik II – Mechanik. – Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg. – 1998. – pp. 1-23.

51. Dmitrochenko O.N., Pogorelov D.Yu. Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation // Multibody System Dynamics 10, No.1, Special issue ‘Virtual Nonlinear Multibody Systems’, Kluwer, Dordrecht, 2003, pp. 17-43.

52. Dürr R., Neerpasch U., Schiehlen W., and White L. Mechatronik und STEP Standardisierung eines neutralen datenformats in STEP für die simulation mechatronischer systeme, Produkt daten Journal, 2, 1995, pp. 2-19.

53. Eichberger A. Transputer-Based Multibody System Dynamic Simulation, Part I: The Residual Algorithm – A Modified Inverse Dynamic Formulation, Part II: Parallel Implementation – Results // Mechanics of Structures and

Machines, 22(2), 1994, 211-261.

54. Featherstone R. Robot dynamics algorithms // Kluwer, Boston. – 1987.

55. Flanagan D.P. and Taylor L.M. An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotation // Computer methods in applied mechanics and engineering 62, 1987, pp. 305-320.

56. Gear C.W., Gupta G.K., Leimkuhler B. Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints // Journal of Computational and Applied Mathematics 12(13), 1985, pp. 77-90.

57. Grimes R.G., Lewis J.G., and Simon H.D. A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems, SIAM J. Matrix analysis and applications, 15 (1994), pp. 228-272.

58. Guyan, R.J. Reduction of Stiffness and Mass Matrix, AIAA Journal, 1965, Vol 3, № 2, pp. 380.

59. Hooker W.W., Margulies G. The dynamical attitude equations for n -body satellite // J. on Astronomical Science 12, 1965, pp. 123-128.

60. Hughes T.J.R. and Winget J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equation arising in large deformation analysis, International Journal for Numerical methods in Engineering 15 (12), 1980, pp. 1862-1867.

61. Hurty W.C. Dynamic analysis of structural system using component modes», AIAA Journal, Vol. 3, №4, 1965, pp. 678-685.

62. Huston R.L. Computer methods in flexible multibody dynamics // Int. J. for Numerical Methods in Engineering 32(8), 1991, pp. 1657-1668.

63. Kruszewski J., Gawronski W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S. Metoda Sztywnych Elementow Skonczovnych (Rigid Finite Element Method), Arkady Warszawa, 1975 (польск.).

64. Lötstedt P., and Petzold L.R. Numerical Solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints I: Convergence results for backwards differentiation formulas, Math. Comput., 46 (1986), pp 491-516.

65. Levinson D.A. Equations of motion for multi-rigid-body systems via symbolic manipulations // Journal of Spacecraft and Rockets 14, 1977, pp. 479-487.

66. MacNeal, R. H. A hybrid method of component mode synthesis” J. Computers and Structures, Vol. 1, No. 4, Dec. 1971, pp. 581-601.

67. Mikkola A.M., Shabana A.A. A new plate element based on the absolute nodal coordinate formulation // Proceedings of ASME 2001 DETC, Pittsburgh, 2001.

68. Nikraves, P. E. Model Reduction Techniques in Flexible Multibody Dynamics, NATO Science Series II, Vol. 103 Virtual nonlinear multibody sys-

tems, by ed. W. Schiehlen and M. Valašek, Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 83-102.

69. Omar M.A., Shabana A.A. A two-dimensional shear deformation beam for large rotation and deformation // *Journal of Sound and Vibration* 243(3), 2001, pp. 565-576.

70. Pascal M., Gagarina T. Numerical simulation of flexible multibody systems using a virtual rigid body model // *Proc. of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1*, W.Schielen, M.Valášek (Eds.), Prague, 2002, pp. 174-179.

71. Park K.C. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations, *J. Comput. Appl. Mech* (June 1975), pp. 464-470.

72. Päsler M. *Prinzipie der mechanik*, De Gruyter, Berlin, 1968.

73. Pogorelov D. Multibody system approach in simulation of underwater cable dynamics // *Abstr. of Euromech 398 Colloq. on Fluid-Structure Interaction in Ocean Engineering*, TU Hamburg-Harburg, Hamburg, Germany, 1999, p. 40.

74. Pogorelov D. Plate modeling by rigid-elastic elements // *Zwischenbericht ZB-103*, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1998.

75. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling, *Numerical algorithms*, v. 19 (1998), pp. 183-194.

76. Rauh J. Ein Beitrag zur Modellierung Elastischer Balkensysteme // *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18*, Nr. 37, VDI-Verlag, Dusseldorf, Germany, 1997.

77. Roberson R.E., Wittenburg J. A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with reference to the problem of satellite attitude control // *Proc. 3rd Congr. Int. Fed. Autom. Control*, Butterworth, Vol. 1, Book 3, Paper 46 D, London, 1967.

78. Schiehlen W. (Ed.) *Multibody Systems Handbook*, Springer, Berlin, 1990.

79. Schiehlen W. *Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives. Multibody System Dynamics 1*, Kluwer Academic Publishers: 1997, pp. 149-188.

80. Schiehlen W., A. Rückgauer, Th. Schirle Force coupling versus differential algebraic description of constrained multibody systems // *Multibody system dynamics* 4, 2000, pp. 317 – 340.

81. Schiehlen W., Kreuzer E. Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme // *Ing.-Archiv* 46, 1977, pp. 185-194.

82. Schwertassek R. Flexible bodies in multibody systems. – Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesis and optimization / Jorge Angeles, Evtim Zakhariiev. p. cm. – (NATO ASI series. Series F,

Computer and systems sciences; vol. 161). – pp. 329-363.

83. Shabana A.A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and large deformation analysis of flexible bodies // Techn. Rep. No. MBS96-1-UIC, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Illinois at Chicago, March 1996.

84. Shabana A.A. Dynamics of Multibody Systems, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

85. Shabana A.A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments // Multibody System Dynamics 1, 1997, pp. 189-222.

86. Shabana, A. A. Computer implementation of flexible multibody equation, Computer-Aided Analysis of Rigid and flexible mechanical systems, M.S. Pereira and J.A.C. Ambrosio, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 325-349.

87. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Theory // Journal of Mechanical Design 123, 2001, pp. 606-621.

88. Shabana A.A., Wehage R.A. Coordinate reduction technique for transient analysis of special substructures with large angular rotations // Journal of Structural Mechanics 11(3), 1983, pp. 401-431.

89. Simo J.C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem, Part I // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 49, 1985, pp. 55-70.

90. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite strain rod model, Part II: Computational aspects // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58, 1986, pp. 79-116.

91. Simon H.D. Analysis of the symmetric Lanczos algorithm with reorthogonalization methods. *Linear Algebra Appl.*, 61, 1984, pp. 101-131.

92. Uicker J.J. (Jr.) On the dynamic analysis of spatial linkages using 4 by 4 matrices // Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, 1965.

93. Vukobratović M., Frank A.A., Juricić D. On the stability of biped locomotion // IEEE Transactions on Biomedical Engineering BME-17, 1970, pp. 25-36.

94. Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H., Dmitrochenko O., Pogorelov D. Large oscillations of a thin cantilever beam: Physical experiments and simulation using absolute nodal coordinate formulation // Journal of Nonlinear Dynamics, Kluwer, Dordrecht, 2003.

95. Yoo W.-S., Lee J.-H., Sohn J.-H., Park S.-J., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Comparison of physical experiments and computer simulation with ANCF: Large deformation of a thin cantilever beam // 29th ASME International Design Engineering Technical Conferences, Chicago, 2003, DETC2003/VIB-48307.

96. Yoo W.-S, Park S.-J., Lee J.-H., Sohn J.-H., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Large oscillations of a thin clamped plate: Modeling in absolute nodal coordinate formulation and comparison with experiments // Proc. of ECCOMAS-2003 on Advances in Computational Multibody Dynamics, Lisbon, 2003.

97. Yoo W.-S, Park S.-J., Lee J.-H., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Large deflection analysis of a thin plate with ANCF: Computer simulation and experiments // Multibody System Dynamics, Kluwer, Dordrecht, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Доказательство леммы

Докажем утверждение леммы, которое используется в параграфе 2.1:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}^{(1)} - \frac{\partial(\mathbf{B}^{(1)} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} \mathbf{B}^{(1)} \quad (\text{П1.1})$$

Доказательство леммы строится посредством последовательного доказательства двух утверждений:

Утверждение 1.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{(0)}}{\partial q_i} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{П1.2})$$

Доказательство.

По определению угловой скорости имеем

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{10} = \sum_k \mathbf{A}'_{01,k} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k, \quad \mathbf{A}'_{01,k} = \frac{\partial \mathbf{A}_{01}}{\partial q_k},$$

откуда немедленно следует

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} &= \mathbf{A}'_{01,i} \mathbf{A}_{10}, \\ \frac{d \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial q_i} &= \sum_k (\mathbf{A}''_{01,k,i} \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}'_{01,k} \mathbf{A}'_{10,i}) \dot{q}_k = \sum_k \mathbf{A}''_{01,k,i} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k + \left(\sum_k \mathbf{A}'_{01,k} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k \right) \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}'_{10,i} = \\ &= \sum_k \mathbf{A}''_{01,k,i} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned}$$

Далее вычислим производную от первого выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{A}'_{01,i} \mathbf{A}_{10}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\mathbf{A}'_{01,i} \mathbf{A}_{10}) \dot{q}_k = \sum_k (\mathbf{A}''_{01,i,k} \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}'_{01,i} \mathbf{A}'_{10,k}) \dot{q}_k = \\ &= \sum_k \mathbf{A}''_{01,k,i} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k + \mathbf{A}'_{01,i} \mathbf{A}_{10} \sum_k \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}'_{10,k} \dot{q}_k = \sum_k \mathbf{A}''_{01,k,i} \mathbf{A}_{10} \dot{q}_k - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}. \end{aligned}$$

Вычитая из последнего выражения предыдущее, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial q_i} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$$

Используя тождество $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{(\mathbf{a}\mathbf{b})}$, получим

$$\tilde{\omega}^{(0)} \frac{\partial \tilde{\omega}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{\omega}^{(0)}}{\partial \dot{q}_i} \tilde{\omega}^{(0)} = \tilde{(\omega}^{(0)} \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \dot{q}_i})}.$$

Переходя от кососимметрических матриц к векторам, получим выражение (П1.2).

Утверждение 2.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial q_i} = -\tilde{\omega}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{П1.3})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{01} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (\mathbf{A}_{01} \omega^{(1)})}{\partial q_i} &= \mathbf{A}_{01} \tilde{\omega}^{(1)} \mathbf{A}_{10} \frac{\partial (\mathbf{A}_{01} \omega^{(1)})}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{A}}_{01} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} + \mathbf{A}_{01} \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathbf{A}_{01}}{\partial q_i} \omega^{(1)} - \mathbf{A}_{01} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial q_i} &= \mathbf{A}_{01} \tilde{\omega}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned}$$

Умножим уравнение слева на \mathbf{A}_{10} и воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{10} \dot{\mathbf{A}}_{01} &= \tilde{\omega}^{(1)}, \quad \mathbf{A}_{10} \frac{\partial \mathbf{A}_{01}}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{\omega}^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \\ \tilde{\omega}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{\omega}^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \omega^{(1)} - \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial q_i} &= \tilde{\omega}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}, \end{aligned}$$

что с учетом соотношения

$$\frac{\partial \tilde{\omega}^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \omega^{(1)} = -\tilde{\omega}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}$$

приводит к доказательству утверждения 2.

Поскольку $\omega = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$, то

$$\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{b}_i^{(1)} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{b}_i^{(1)} - \frac{\partial (\mathbf{B}^{(1)} \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = -\tilde{\omega}^{(1)} \mathbf{b}_i^{(1)}, \quad \text{где } \mathbf{b}_i - i\text{-ый столбец матрицы } \mathbf{B}.$$

Отсюда получаем окончательное соотношение (П1.1).

Приложение 2. Вывод уравнений движения упругой подсистемы на основе общего уравнения динамики

Представим упругое тело системой материальных точек, соответствующих узлам конечно-элементной схемы. Моментами инерции в узлах для простоты рассмотрения пренебрегаем. Тогда общее уравнение динамики упругой подсистемы запишем в следующем виде:

$$\sum_k \delta \mathbf{r}_k^T (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k) = 0.$$

Ускорение узла k , получим двукратным дифференцированием по времени выражения (2.2) (рис. 2.1):

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{u}_k + \tilde{\varepsilon} \mathbf{u}_k + 2\tilde{\omega} \dot{\mathbf{d}}_k + \ddot{\mathbf{d}}_k = \mathbf{G}_k \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}'_k,$$

где

$$\mathbf{G}_k = (\mathbf{E} \quad -\tilde{\mathbf{u}}_k \mathbf{B} \quad \mathbf{H}_k) - \text{матрица Якоби } k\text{-го узла, } \mathbf{a}'_k = \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{u}_k + \tilde{\varepsilon} \mathbf{u}_k + 2\tilde{\omega} \dot{\mathbf{d}}_k.$$

Выражение для вариации координат узла имеет следующий вид:

$$\delta \mathbf{r}_k = \mathbf{G}_k \delta \mathbf{q}.$$

Отсюда следует уравнение движения $\sum_k \mathbf{G}_k^T (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k) = 0$. Перепишем его в

следующем виде:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{M} = \sum_k m_k \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k, \quad \mathbf{Q} = \sum_k \mathbf{G}_k^T (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}'_k),$$

где \mathbf{F}_k – равнодействующая сил, приложенных в k -ом узле, \mathbf{Q} – матрица-столбец обобщенных сил.

Общие выражения для матрицы масс и обобщенных сил имеют следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m\mathbf{E} & -(\sum_k m_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \mathbf{B} & \sum_k m_k \mathbf{H}_k \\ * & -\mathbf{B}^T (\sum_k m_k \tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \mathbf{B} & \mathbf{B}^T (\sum_k m_k \tilde{\mathbf{u}}_k \mathbf{H}_k) \\ * & * & \sum_k m_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sum (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}'_k) \\ \mathbf{B}^T \sum \tilde{\mathbf{u}}_k (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}'_k) \\ \sum \mathbf{H}_k^T (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}'_k) \end{pmatrix},$$

где знак «*» в позиции i, j матрицы масс означает транспонированную матрицу в позиции j, i .

Пренебрегая квадратичными членами, получим следующее выражение для матрицы масс:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m\mathbf{E} & -\left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k + \sum_i \left(\sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki}\right) w_i\right) \mathbf{B} & \sum m_k \mathbf{H}_k \\ * & -\mathbf{B}^T \left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k + \sum_i \left(\sum_k m_k (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k)\right) w_i \right) \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \mathbf{H}_k + \sum_i \left(\sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \mathbf{H}_k\right) w_i \right) \\ * & * & \sum m_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \end{pmatrix}$$

Обобщенные силы от силы тяжести имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q}_g = \begin{pmatrix} m\mathbf{g} \\ \mathbf{B}^T \left(\sum m_k \tilde{\mathbf{u}}_k\right) \mathbf{g} \\ \left(\sum m_k \mathbf{H}_k^T\right) \mathbf{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{g} \\ \mathbf{B}^T \left(\sum m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k + \sum_i \left(\sum m_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki}\right) w_i\right) \mathbf{g} \\ \left(\sum m_k \mathbf{H}_k^T\right) \mathbf{g} \end{pmatrix}.$$

Для вывода выражения обобщенных сил инерции рассмотрим следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_k (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}') \mathbf{u}_k &= \tilde{\mathbf{u}}_k (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{E}) \mathbf{u}_k - (\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}' = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \boldsymbol{\omega} - (\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}' = \\ &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\omega} - (\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}', \end{aligned}$$

где использовано тождество

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T - \mathbf{u}_k^2 \mathbf{E}) \boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \boldsymbol{\omega}.$$

Подставив выражение для \mathbf{u}_k ,

$$\mathbf{u}_k = \boldsymbol{\rho}_k + \sum_i \mathbf{h}_{ki} w_i$$

и удаляя квадратичные члены по w , получим следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}') \mathbf{u}_k = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \boldsymbol{\omega} - (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}' - \sum_i \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \boldsymbol{\omega} + (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}' \right] w_i.$$

Далее воспользуемся результатом тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{kj}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}') \mathbf{u}_k &= \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{u}}_k \boldsymbol{\omega} - \mathbf{h}_{kj}^T \mathbf{u}_k \boldsymbol{\varepsilon}' = \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \boldsymbol{\omega} - \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \boldsymbol{\varepsilon}' + \sum_i \left[\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \boldsymbol{\varepsilon}' \right] w_i. \end{aligned}$$

Тогда выражение для обобщенных сил инерции без учета сил Кориолиса примет следующий вид:

$$\mathbf{Q}_{in1} = - \left(\begin{array}{l} (\tilde{\omega}\tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon}') \left(\sum_k m_k \boldsymbol{\rho}_k + \sum_k m_k \mathbf{H}_k \mathbf{w} \right) \\ \mathbf{B}^T \left(-\tilde{\omega} \left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \right) \boldsymbol{\omega} - \left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \right) \boldsymbol{\varepsilon}' + \right. \\ \left. + \sum_i \left[-\tilde{\omega} \left(\sum_k m_k (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \right) \boldsymbol{\omega} - \left(\sum_k m_k (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \right) \boldsymbol{\varepsilon}' \right] w_i \right) \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega}^T \left(\sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \right) \boldsymbol{\omega} - \left(\sum_k m_k \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \right) \boldsymbol{\varepsilon}' + \\ + \sum_i \left[\boldsymbol{\omega}^T \left(\sum_k m_k \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \right) \boldsymbol{\omega} - \left(\sum_k m_k \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \right) \boldsymbol{\varepsilon}' \right] w_i \end{array} \right\} \right) \end{array} \right)$$

Запишем выражение сил инерции от ускорения Кориолиса. При этом воспользуемся следующими соотношениями:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\omega} \dot{\mathbf{d}}_k \approx \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\omega} \dot{\mathbf{d}}_k = -\sum_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \boldsymbol{\omega} \dot{w}_i, \quad \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\omega} \dot{\mathbf{d}}_k = -\sum_i \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \boldsymbol{\omega} \dot{w}_i.$$

$$\text{Тогда } \mathbf{Q}_{in2} = -2 \left(\begin{array}{l} \tilde{\omega} (\sum_k m_k \mathbf{H}_k) \dot{\mathbf{w}} \\ -\mathbf{B}^T \sum_i \left(\sum_k m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \right) \boldsymbol{\omega} \dot{w}_i \\ - \sum_i \left(\sum_k m_k \mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \right) \boldsymbol{\omega} \dot{w}_i \end{array} \right).$$

Докажем тождественность приведенных выражений для сил инерции и выражений (2.22), полученных в главе 2. Напомним их вид:

$$\mathbf{k}_r = -\mathbf{A}_{01} (\mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\omega} \mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega} - 2\tilde{\omega} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}}),$$

$$\mathbf{k}_\varphi = \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\omega} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\omega} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}),$$

$$\mathbf{k}_w = \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{\varphi w}^w.$$

Запишем выражение каждого компонента вектора-столбца сил инерции в явном виде.

1. Явный вид слагаемых, составляющих выражение \mathbf{k}_r , полностью совпадает с записью первых компонент векторов \mathbf{Q}_{in1} (первые два слагаемых) и \mathbf{Q}_{in2} (третье слагаемое).

$$2. \mathbf{k}_\varphi = \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\omega} \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\omega} \dot{\mathbf{w}})$$

Запишем последовательно каждое из четырех слагаемых в скобках. С учетом соотношений 2.17, 2.18 получим:

2.1.

$$\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' = \left(-\sum_k (m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k + \mathbf{J}_k) \boldsymbol{\varepsilon}' - \left(\sum_k m_k \sum_i (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r + \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^{rT} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) w_i \boldsymbol{\varepsilon}' - \left(\sum_k m_k \sum_i \sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r \tilde{\mathbf{h}}_{kj}^r w_i w_j \right) \boldsymbol{\varepsilon}' \right) \right)$$

2.2.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \sum_k (m_k \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k + \mathbf{J}_k) \boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \left(\sum_k m_k \sum_i (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r + \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^{rT} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) w_i \boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \left(\sum_k m_k \sum_i \sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki}^r \tilde{\mathbf{h}}_{kj}^r w_i w_j \right) \boldsymbol{\omega} \right)$$

$$2.3. \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} = - \left(\sum_k m_k \left(\sum_i (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} + \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \dot{w}_i - \sum_i \left(\sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\mathbf{h}}_{kj} w_j + \sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{h}}_{ki} w_j \right) \dot{w}_i \right) \right) \boldsymbol{\omega}.$$

$$2.4. \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\omega} \dot{\mathbf{w}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sum_k m_k \left(\sum_i (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \mathbf{h}_{ki} \dot{w}_i + \sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \mathbf{h}_{kj} w_i \dot{w}_j) \right).$$

$$2.5. \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\omega} \dot{\mathbf{w}} = \left(\sum_k m_k \left(\sum_i \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \mathbf{H}_k \dot{w}_i \right) \right) \dot{\mathbf{w}} = \sum_k m_k \left(\sum_i \left(\sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \mathbf{h}_{kj} \dot{w}_j \right) \dot{w}_i \right).$$

Сумма членов 2.1, 2.2, умноженная на \mathbf{B}^T отличается от соответствующего компонента \mathbf{Q}_{in1} квадратичными членами по w , которые не учитывались при выводе уравнений с использованием общего уравнения динамики. Кроме того, учет квадратичных членов добавляет к \mathbf{Q}_{in1} слагаемое 2.5.

Далее, рассмотрим сумму членов $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\omega} \dot{\mathbf{w}}$ (2.3 и 2.4).

Имея в виду тождество $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{(\mathbf{a}\mathbf{b})}$, запишем следующее соотношение:
 $-\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} - \tilde{(\mathbf{b}\mathbf{a})}\tilde{\mathbf{c}} = -\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{c}} = -2\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}}.$

Используя его, указанную сумму можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{J}_{\varphi\varphi}\boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_{\varphi w}\dot{\mathbf{w}} = -2\sum_k m_k \left(\sum_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \dot{w}_i + \sum_i \sum_j \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\mathbf{h}}_{kj} w_i \dot{w}_j \right) \boldsymbol{\omega}.$$

Это выражение, умноженное на \mathbf{B}^T , отличается от соответствующего компонента сил Кориолиса \mathbf{Q}_{in2} слагаемым, полученным с учетом квадратичных членов по w .

$$3. \mathbf{k}_w = \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{J}_{\varphi\varphi}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w + \mathbf{k}_{\varphi w}^w$$

Явная запись произведения $\mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}'$ совпадает с суммой слагаемых со множителем $\boldsymbol{\varepsilon}'$ в выражении \mathbf{Q}_{in1} . Запишем выражение j -го компонента матрицы столбца $\mathbf{k}'_w = \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w + \mathbf{k}_{\varphi w}^w$ в явном виде:

$$k'_{wj} = \sum_k m_k \left(- \sum_i (\mathbf{h}_{kj}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \dot{w}_i) \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T ((\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{kj} + \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) + \sum_i \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{h}}_{ki} w_i + \sum_i \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\mathbf{h}}_{kj} w_i) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T \sum_i \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \mathbf{h}_{ki} \dot{w}_i \right),$$

откуда с учетом соотношений $\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{ki} \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \boldsymbol{\omega}$,

$\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \mathbf{h}_{ki} = -\mathbf{h}_{ki}^T \tilde{\mathbf{h}}_{kj} \boldsymbol{\omega}$ легко получают соответствующие выражения компонент

$\mathbf{Q}_{in1} + \mathbf{Q}_{in2}$.

С учетом последних выкладок выражение \mathbf{Q}_{in} можно записать, используя обозначения главы 2, следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{in} = - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_r \\ \mathbf{k}_\varphi \\ \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{in1} + \mathbf{Q}_{in2} = - \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{01} (\mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{r\varphi} \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{J}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{k}_{\varphi\varphi}^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{rw} \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{B}^T (\dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_{\varphi w} \dot{\mathbf{w}}) \\ \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_{\varphi w}^w \end{bmatrix}$$

Следует отметить, что запись компонент сил Кориолиса в виде отдельного слагаемого весьма удобна для восприятия и полезна для разработки программного обеспечения. Во многих случаях эти силы малы, ими можно пренебречь для повышения эффективности моделирования.

Приложение 3. Краткое изложение некоторых методов решения обобщенной проблемы собственных значений

Обобщенная проблема собственных значений (2.36) отличается от простой проблемы структурой пространства, в котором ищется решение, а именно определением скалярного произведения. Средой для задач (2.36, 2.37) является N -мерное пространство векторов с действительными компонентами, где N – размер задачи. Для задачи (2.37) скалярное произведение векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется соотношением:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Для задачи (2.36) оно будет выглядеть следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N m_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} .$$

Присутствие матрицы \mathbf{M} в уравнении (2.36) увеличивает стоимость поиска собственных пар и затрудняет анализ методов решения, однако, при условии положительной определенности \mathbf{M} , задача (2.36) теоретически не отличается от (2.37). Все методы, подходящие для решения стандартной симметричной проблемы собственных значений, тем или иным способом распространяются на обобщенную проблему. Поэтому анализ методов поиска собственных пар проведем с целью упрощения для стандартной проблемы, после чего для наиболее подходящих методов рассмотрим способы распространения на обобщенную задачу (2.36).

Далее мы будем употреблять термины *верхний* или *правый* для обозначения последних собственных значений в ряду значений задачи, упорядоченных по неубыванию, то есть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$, а термины *нижний* или *левый*, соответственно, для первых или меньших значений. Потребности в ресурсах ЭВМ будем обозначать терминами *цена* или *стоимость*. Оценивая эффективность методов, основное внимание будет сосредоточено на сходимости итерационных процессов, поскольку этот фактор оказывается решающим. При этом конкретное число арифметических операций того или иного действия будет упоми-

наться нечасто. Для стандартных матричных операций оно хорошо известно. В случае разреженных матриц быстрое действие во многом определяется форматом их хранения.

В дополнение к п. 2.4.2.1 подробнее остановимся только на QL алгоритме.

QL алгоритмы строят посредством ортогональных преобразований матричную последовательность, сходящуюся к диагональной матрице:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k,$$

где матрица \mathbf{Q}_k , получается в результате QL преобразования матрицы \mathbf{A}_k , которое является матричной записью процесса ортонормализации Грамма-Шмидта:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{a}_j^{(j)} / \|\mathbf{a}_j^{(j)}\| \tag{П3.1}$$

$$\mathbf{a}_i^{(j+1)} = \mathbf{a}_i^{(j)} - \mathbf{q}_j (\mathbf{q}_j^T \mathbf{a}_i^{(j)}), \quad i=j+1, \dots, N,$$

где в процессе ортонормализации рассматриваются столбцы \mathbf{A} от последнего к первому, \mathbf{L} – левая (нижняя) треугольная матрица. Необходимо отметить, что QL преобразование определено для любых квадратных матриц.

QL алгоритм со сдвигами имеет кубическую скорость сходимости, если в качестве сдвигов применяется отношение Релея. В случае трехдиагональной матрицы удачным выбором являются так же сдвиги по Уилкинсону [38]. Одно QL – преобразование стоит $24 \times N$ операций. Эмпирическое правило говорит, что все собственные значения трехдиагональной матрицы можно вычислить приблизительно за 1.7 итераций на одно собственное значение, при этом достаточно $9 \times N^2$ операций. Если алгоритм используется для поиска собственных векторов, дополнительно требуется $4 \times N^2 + 21 \times N$ операций.

Метод Релея-Ритца

Основная идея метода изложена в п. 2.4.2.2. Здесь приведем этапы процедуры, реализующей метод. Матричная форма процедуры Релея Ритца обобщенно формулируется как последовательность следующих операций.

1. Выбрать ортонормированный базис \mathbf{Q} $n \times m$ подпространства размером $m < n$.

2. Сформировать матрицу $\mathbf{A}\mathbf{Q}$.
3. Построить матричное отношение Реллея $\mathbf{H} = \rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}\mathbf{Q}$ размером $m \times m$.
4. Вычислить $p < m$ собственных пар \mathbf{H} , представляющих интерес: $\mathbf{H}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i\theta_i$.
5. Вычислить, если требуется, векторы Ритца $\mathbf{y}_i = \mathbf{Q}\mathbf{s}_i$.
6. Оценить ошибки через невязки. Каждый интервал $[\theta_i - \|\mathbf{r}_i\|, \theta_i + \|\mathbf{r}_i\|]$ содержит собственное число \mathbf{A} . Если интервалы перекрываются, необходим дополнительный анализ.

Аппроксимации Релея-Ритца оптимальны в том смысле, что они минимизируют $\|\mathbf{R}\|$, $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_m]$ - норму матрицы невязки, что означает «групповую» оптимальность найденных векторов.

Итерирование подпространства

Метод итерирования подпространства распространяет простые векторные итерации на группу векторов $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_m$, образующих начальный базис подпространства L , размерностью m . В результате применения метода строится последовательность ортонормальных базисов \mathbf{Q}_i , сходящуюся к базису инвариантного относительно \mathbf{A} подпространства. Поэтому однократное применение процедуры Релея-Ритца на k -ом шаге метода может привести к успеху в поиске отдельных собственных пар, если k достаточно велико. Образно говоря, метод "поворачивает" исходный базис в сторону инвариантного подпространства.

Эффективная реализация метода связана с попыткой избежать дорогостоящего формирования матричного отношения Релея (2.38) в явном виде. Теоретическое обоснование такой возможности приводится в [31, 38].

Стоит отметить два возможных усовершенствования, которые могут улучшить сходимость и надежность реализации. Первое – использование полиномов Чебышева для ускорения сходимости в случае близких собственных значений. Второе – рандомизация, применяемая во избежание неудачного выбора начального подпространства L ортогональным какому-либо собственному вектору.

Суть ее состоит в том, что после каждой ортонормализации векторов базиса вектор, соответствующий θ_1 , заменяется случайным вектором, ортонормальным к остальным векторам базиса. Такой прием разумно выполнять после становления отношений Релея.

Лучший, по-видимому, алгоритм, воплощающий все достижения в этой области, предложен Рутисхаузером [38].

Важным моментом реализации метода является выбор размера подпространства. Малый размер подпространства приведет к медленной сходимости метода, слишком большой – к неоправданным вычислительным затратам. Оптимальный размер определяется структурой спектра матрицы A , обычно неизвестной заранее. Поэтому успешный выбор размера во многом определяется наличием дополнительной информации, а также интуицией и опытом исследователя.

Метод итерирования подпространства приемлем для решения больших задач и успешно применялся специалистами в различных областях науки и техники, однако, с появлением метода Ланцоша, который практически во всех ситуациях эффективнее, он отошел на второй план. Пожалуй, единственным аргументом в его защиту являются более скромные запросы к оперативной памяти, о которых будет сказано при обсуждении метода Ланцоша. Но, во-первых, эта экономия весьма незначительна и, во-вторых, оперативная память в настоящее время далеко не самый дорогой ресурс, а современные персональные компьютеры и операционные системы, как отмечалось, позволяют адресовать более 1 гигабайта. Эти обстоятельства сводят преимущества итерирования подпространств практически к нулю и стимулируют к изучению метода Ланцоша.

Метод Ланцоша. Теоретические основы

Близость аппроксимаций, полученных с применением процедуры Релея-Ритца, определяется свойствами подпространства, в котором они ищутся. Удачным решением является выбор в виде подпространства Крылова, базисом которого служат векторы последовательности:

$$\mathbf{f}, \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{A}^2\mathbf{f}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{f},$$

где \mathbf{f} – произвольно выбранный вектор. Если \mathbf{f} не связан специальным образом с \mathbf{A} и $m \leq n$, размер K^m равен m . Применение процедуры Релея-Ритца к *последовательности вложенных* подпространств Крылова составляет суть *метода Ланцоша*. Основополагающая статья Ланцоша появилась в 1950 году.

Замечательной особенностью подпространства Крылова является трехдиагональность ортогональной проекции на него матрицы \mathbf{A} , вследствие чего, этапы 3-5 процедуры Релея-Ритца реализуются очень эффективно.

Далее будем использовать обозначение \mathbf{T} для трехдиагональной формы \mathbf{H} . Введем $\alpha_i, i=1..j$ – для диагонали \mathbf{T}_j , $\beta_i, i=1..j-1$ – для внедиагональных элементов, то есть:

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_1 & \dots & \beta_j & \\ & & \beta_{j-1} & \alpha_j & \end{bmatrix}.$$

Тогда метод Ланцоша на j -ом шаге представляется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_j\mathbf{T}_j &= \mathbf{r}_j\mathbf{e}_j^T, \text{ где } \mathbf{r}_j = \mathbf{q}_{j+1}\beta_j \\ \mathbf{E} - \mathbf{Q}_j^T\mathbf{Q}_j &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{ПЗ.2}$$

где \mathbf{e}_j – единичный вектор с единицей в j -ой позиции. Векторы ортонормированного базиса подпространства Крылова, расположенные по столбцам \mathbf{Q}_j , называются векторами Ланцоша, а \mathbf{Q}_j – базисом Ланцоша.

Построение аппроксимаций из *последовательности вложенных* подпространств, размер которых увеличивается на 1 на каждом шаге метода резко снижает затраты на ортонормализацию векторов базиса \mathbf{Q}_m , потому что на шаге j в нашем распоряжении имеется ортонормированный базис подпространства K^{j-1} , который необходимо лишь дополнить одним вектором. Более того, векторы \mathbf{q}_j связаны трехчленной рекурсией. Легко показать, что $\mathbf{q}_4 = \mathbf{A}^3\mathbf{q}_1 = \mathbf{A}\mathbf{q}_3$

ортогонален к вектору \mathbf{q}_1 и его необходимо ортогонализировать только к $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.
Трёхдиагональная форма проекции \mathbf{A} – следствие этого факта.

Таким образом, дополнение базиса Ланцоша одним вектором на j -ом шаге осуществляется на основе соотношения:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{q}_{j+1}\beta_j = \mathbf{A}\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{j-1}\beta_{j-1} - \mathbf{q}_j\alpha_j, \quad \beta_j = \|\mathbf{r}_j\| \quad (\text{ПЗ.3})$$

Пусть заданы $\mathbf{r}_0, \beta_0 = \|\mathbf{r}_0\| \neq 0$. Тогда алгоритм вычисления (ПЗ.3) представляется последовательностью следующих соотношений.

1. $\mathbf{r}_{j-1} / \beta_{j-1} \rightarrow \mathbf{q}_j$.
2. $\mathbf{A}\mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{u}_j$.
3. $\mathbf{u}_j - \mathbf{q}_{j-1}\beta_{j-1} \rightarrow \mathbf{r}_j, (\mathbf{q}_0 = 0)$.
4. $\alpha_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{r}_j$.
5. $\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_j\alpha_j \rightarrow \mathbf{r}_j$. (ПЗ.4)
6. $\beta_j = \|\mathbf{r}_j\|$.
7. Вычисляются те $\theta_j, \mathbf{s}_j, \mathbf{y}_j$, которые нужны.
8. Если точность удовлетворительная процесс останавливается.

Алгоритм (ПЗ.4) построен в форме, устойчивой к явлению взаимного уничтожения при вычитаниях.

Здесь необходимо сказать несколько слов о способах, используемых на этапе 7, поскольку от этого зависит эффективность метода в целом. Оптимальным для поиска собственных пар \mathbf{T} представляется применение QL алгоритма со сдвигами по Уилкинсону в комбинации с обратной итерацией. При известном числе Ритца обратная итерация превращается в однократное решение системы уравнений с трёхдиагональной матрицей и реализуется как обратная подстановка с нормировкой [4]. Как отмечено выше, поиск всех j собственных значений \mathbf{T} требует примерно $9 \times j^2$ операций и порядка $O(j)$ операций на поиск каждого собственного вектора \mathbf{T} . В совокупности эти операции составляют малую часть стоимости шага алгоритма при $j \ll n$.

Весьма дорогостоящим выглядит, на первый взгляд, восьмой этап. В самом деле, если использовать в качестве меры сходимости алгоритма норму невязки $\|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}\theta\|$, то мы сталкиваемся с необходимостью формирования произведений $\mathbf{Q}\mathbf{s}$ и $\mathbf{A}\mathbf{y}$. Однако, если использовать соотношения (ПЗ.2) выражение нормы невязки для любого вектора Ритца, на j -ом шаге алгоритма можно переписать в следующем виде:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}\theta\| = \|(\beta_j \mathbf{q}_{j+1} \mathbf{e}_j^T) \mathbf{s}\| = \beta_j |\mathbf{e}_j^T \mathbf{s}|$$

То есть нижние компоненты вектора \mathbf{s} являются хорошей мерой сходимости и формирование векторов Ритца можно отложить до достижения необходимой точности. Другими словами, если вектор Ритца сошелся на k -ом шаге алгоритма, только $k-1$ коэффициентов в разложении вектора Ритца по векторам базиса Ланцоша

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_j s_{ij}$$

больше заданного порогового значения, близкого к нулю.

Если на j -ом шаге алгоритма $\beta_j = 0$ с рабочей точностью, то это означает, что обнаружено инвариантное подпространство матрицы \mathbf{A} , и все пары Ритца (θ_i, \mathbf{y}_i) являются собственными парами \mathbf{A} . Чтобы продолжить вычисления необходимо выбрать некоторый случайный вектор, ортогонализировать его ко всем векторам базиса Ланцоша и результат рассматривать как новый стартовый вектор \mathbf{r}_0 . Таким образом, процесс возобновляется. Однако вполне может случиться, что выбранный вектор лежит в уже найденном подпространстве, то есть длина \mathbf{r}_0 может быть равна нулю с рабочей точностью. В этом случае нужно пробовать другой вектор до тех пор, пока не будет обнаружено новое подпространство \mathbf{A} .

Структура подпространства Крылова обусловила превосходные аппроксимации собственных пар матрицы \mathbf{A} . Анализ сходимости метода, проведенный Каниэлем и Садом (результаты приводятся в [31]) показал, что метод Ланцоша сходится быстрее метода итерирования подпространств даже в том случае, когда последний использует Чебышевское ускорение.

Нужно указать на неизбежное теоретическое ограничение, связанное с вычислениями на основе степенных последовательностей. Если \mathbf{A} имеет полный ранг, любой вектор \mathbf{f} может быть представлен в базисе собственного пространства \mathbf{A} . Предположим, что \mathbf{f} выбран таким, что он ортогонален некоторому собственному подпространству матрицы \mathbf{A} . Легко показать, что тогда любой вектор последовательности $K^i \mathbf{f}$, $i=1..m-1$, будет также ортогонален этому подпространству, и ни один вектор из этого подпространства не может быть найден. Более того, проекция \mathbf{A} на K^m имеет простые собственные значения и кратные значения \mathbf{A} теоретически также не могут быть обнаружены.

Это может привести к ложному выводу о том, что при наличии в спектре задачи кратных или очень близких значений некоторые β_i должны быть очень малы. Парлетт воспроизводит в своей монографии пример трехдиагональной матрицы размером 21, предложенный Уилкинсоном:

$$\alpha_i: 10,9,8,\dots,0,1,2,\dots,10; \beta_i = 1$$

$$\lambda_{20}=10.74619418290332\dots, \lambda_{21}=10.74619418290339\dots$$

Относительная разность собственных значений 20 и 21 имеет порядок 10^{-15} и, тем не менее, они не кратные. Особенно важно, что при этом ни одно значение β_i не мало. Этот факт позволяет на практике использовать трехдиагональную форму для расчета кратных собственных пар, поскольку тринадцать знаков после десятичной точки – очень высокая, редко достижимая точность вычислений. Кроме того, результат расчета не изменится, если даже при гораздо более низкой относительной разности собственных значений, скажем 10^{-5} , рассматривать их как кратные.

Алгоритм (ПЗ.4) обнаруживает кратные пары вследствие наличия ошибок округлений, позволяющих "попасть" в кратное подпространство. Подробнее об ошибках округлений будет сказано ниже. Здесь же отметим тот факт, что кратные пары ищутся *последовательно* друг за другом, при этом сходимость далеко не всегда монотонная. То есть, если λ_i имеет кратность k , то после того, как сошлось λ_{i1} , может быть найдено несколько собственных значений прежде, чем начнет сходиться λ_{i2} и так далее до λ_{ik} . Учет таких ситуаций и корректная их об-

работка усложняет реализацию метода. Это обстоятельство побудило к разработке блочной версии алгоритма.

Основная идея заключается в том, чтобы итерации Ланцоша начинать не с одного вектора, а с группы векторов, образующих начальную матрицу \mathbf{Q}_1 размером $n \times b$. Распространение метода осуществляется непосредственно, при этом задаче соответствует так называемое "большое" подпространство Крылова, базисом которого служат векторы последовательности:

$$\mathbf{Q}_1, \mathbf{A}\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{Q}_1.$$

Проекция исходной матрицы на большое подпространство Крылова имеет блочно-трехдиагональную форму. Непосредственное распространение алгоритма (ПЗ.4) предполагает использование QR разложения матрицы невязки размером $n \times b$. Для реализации автором выбрана более изящная формулировка, приведенная в [31], согласно которой исходная матрица приводится к матрице ленточного вида непосредственно.

Выберем ортогональные векторы $\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_b$ и положим $\mathbf{r} = \mathbf{q}_b, t_{b,0} = 1$.

Для $j=1, 2, \dots$ выполним итерационный процесс:

1. $\mathbf{r}/t_{j+b-1, j-1} \rightarrow \mathbf{q}_{j+b-1}$.
2. $\mathbf{A}\mathbf{q}_j - \sum_{i=j-b}^{j-1} \mathbf{q}_i t_{ij} \rightarrow \mathbf{r}, (\mathbf{q}_i = 0, \text{ если } i < 1)$.
3. $\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}^T \mathbf{r} \rightarrow t_{ij} \\ \mathbf{r} - \mathbf{q}_i t_{ij} \rightarrow \mathbf{r} \end{array} \right\} i = j \dots j + b - 1$.
4. $\|\mathbf{r}\| \rightarrow t_{j+b, j}$, если $t_{j+b, j} = 0$, то $b = b - 1$.
5. Контроль сходимости.

(ПЗ.5)

Здесь мы вернулись к привычным обозначениям для элементов матрицы \mathbf{T} .

Один шаг реализации (ПЗ.5) выглядит как минимум в два (при $b=2$) раза дороже одного шага простого алгоритма (ПЗ.4). На такие затраты приходится идти ради того, чтобы иметь кратные значения на одном и том же шаге алгоритма. Для поиска собственных значений ленточной матрицы оптимальной представ-

ляется комбинация приведения к трехдиагональной форме без увеличения ширины ленты посредством вращений Гивенса [31] и QL-алгоритма.

Особенности реализации метода Ланцоша

К сожалению, на практике теоретическая картина разрушается ошибками округлений. Результаты вычислений соответствуют теоретическим лишь на нескольких первых шагах, обычно не более 10. Затем векторы \mathbf{q}_j теряют ортогональность к ранее вычисленным, а спустя еще несколько шагов матрица $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ даже не имеет полного ранга. Продолжение вычислений для практических целей после этого теряет всякий смысл, особенно для больших задач.

Поскольку явление потери ортогональности векторами Ланцоша довольно долгое время не имело внятного объяснения, в качестве действенного средства была предложена ортогонализация \mathbf{q}_{j+1} на j – ом шаге ко всем ранее вычисленным векторам. Алгоритм (3.11) дополняется шагом

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_k (\mathbf{q}_k^T \mathbf{r}_j) \rightarrow \mathbf{r}_j, k=1..j-1, \quad (\text{П3.6})$$

который следует после пятого этапа алгоритма. Проблема, таким образом, разрешается, однако привлекательность алгоритма падает прямопропорционально возросшим затратам на ортогонализацию. Потеря быстродействия особенно ощутима в случаях, когда для хранения \mathbf{Q} используются вторичная память.

Только спустя чуть более 20 лет после первой статьи Ланцоша, в 1971 году канадский математик Крис Пэж провел тщательное исследование причин разрушения алгоритма Ланцоша, результаты которого стали предметом его диссертации. Они позволили предложить более экономичные способы поддержания ортогональности базиса Ланцоша на необходимом уровне: *частичную и выборочную* ортогонализацию. Далее в смысле ортогонализации иногда будет использоваться термин «очищение».

Частичная ортогонализация

В основе частичной ортогонализации лежит простая идея. Рассмотрим матрицу $\mathbf{W}_j = \mathbf{Q}_j^T \mathbf{Q}_j$. Согласно теории она должна в точности совпадать с единич-

ной матрицей \mathbf{E} . Однако на практике элементам \mathbf{W} соответствуют реальные значения косинусов углов между соответствующими векторами базиса. Предполагается, и опыт вычислений это подтверждает, что вектор \mathbf{q}_{j+1} , формируемый на j -ом шаге, имеет плохой угол наклона только по отношению к некоторым из ранее вычисленных \mathbf{q}_j . Пэж предложил эффективные рекуррентные соотношения для быстрой оценки элементов w_{jk} матрицы \mathbf{W} . Очевидно, на шаге j , нам необходима информация о ее $j+1$ строке. Легко показать, что при естественных допущениях: $\|\mathbf{q}_j\|=1$ и $\beta_j |\mathbf{q}_{j+1}^T \mathbf{q}_j| = O(\varepsilon) \|\mathbf{A}\|$ справедливы следующие соотношения:

$$w_{jj} = 1, \quad w_{j,j-1} = \mathbf{q}_j^T \mathbf{q}_{j-1}$$

$$\beta_j w_{j+1,k} = \beta_k w_{j,k+1} + (\alpha_k - \alpha_j) w_{jk} + \beta_{k-1} w_{j,k-1} - \beta_{j-1} w_{j-1,k} + \mathbf{q}_j^T \mathbf{f}_k - \mathbf{q}_k^T \mathbf{f}_j, \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$k=1..j-1, w_{k0}=0,$$

где введен вектор \mathbf{f} для учета ошибок округлений на соответствующем шаге.

Блочная формулировка выглядит аналогично с учетом соответствующей замены терминов.

Анализ частичной ортогонализации приводится в работе [91]. Показано, что для устойчивой реализации достаточно поддерживать значение $|w_{ij}| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $i \neq j$, ε – точность вычислений.

Алгоритм с частичной ортогонализацией естественно получается дополнением (ПЗ.4) этапом оценивания $|w_{j+1,k}|$ на основе соотношений (ПЗ.7) и выполнения (ПЗ.6) с векторами \mathbf{q}_k , для которых $|w_{j+1,k}| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Заметим, что для реализации (ПЗ.7) дополнительно необходимо всего лишь 3 вектора размером j .

Выборочная ортогонализация

Другим, гораздо менее очевидным фактом является утверждение теоремы, доказанной Пэжем, которое объясняет потерю ортогональности векторов базиса. Доказательство теоремы приводится в [31]. Основным результатом отражается соотношением:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{q}_{j+1} = \gamma_{ii}^{(j)} / \beta_{ji}, \quad (\text{ПЗ.8})$$

где $\gamma_{ii}^{(j)} \leq \varepsilon \|\mathbf{A}\|$, $\beta_{ji} = \beta_j s_{ji}$, s_{ji} – j -ая компонента i -го вектора. Оно означает, что векторы Ланцоша более всего отклоняются в сторону сошедшихся собственных векторов \mathbf{A} . На основании этого можно предложить более экономичный способ поддержания качества базиса Ланцоша по сравнению с полной ортогонализацией. Ключевая идея заключается в том, чтобы контролировать наклон $\mathbf{q}_{j+1}(\mathbf{r})$ к $\mathbf{y}_i^{(j)}$ и ортогонализировать их только тогда, когда значение β_{ji} становится малым. Она стала основой построения алгоритма Ланцоша с *выборочной ортогонализацией*. Замечательным обстоятельством является возможность контролировать углы наклонов без вычисления \mathbf{y}_i , поскольку каждое β_{ji} может быть вычислено при известном $\theta_i^{(j)}$ примерно за $4j$ операций.

Для описания алгоритма вводится понятие множества G_j индексов i , формируемое на j -ом шаге алгоритма согласно критерия $\beta_{ji} < \sqrt{\varepsilon} \|\mathbf{T}_j\|$. Значение $\beta_{ji} = \sqrt{\varepsilon} \|\mathbf{T}_j\|$ называется пороговым. Множество G_j формируется всякий раз, когда новый вектор \mathbf{s}_i достигает порогового значения. Векторы Ритца, индексы которых составляют множество G_j , делятся на две категории:

- сошедшиеся векторы Ритца, т.е. векторы, для которых $\beta_{ji} < j\varepsilon \|\mathbf{A}_j\|$;
- так называемые «хорошие» векторы Ритца, для которых β_{ji} лежит в пределах между пороговым и сошедшимся значением.

Понятно, что после формирования G_j вычисляются только «хорошие» векторы Ритца. Вектор \mathbf{q}_{j+1} , вычисляемый на j -ом шаге алгоритма, очищается от всех векторов, индексы которых составляют G_j . В качестве дополнительного необязательного средства поддержания ортогональности векторов \mathbf{q} предлагается периодически выполнять процедуру Грамма-Шмидта для сошедшихся векторов Ритца.

Подробный анализ выборочной ортогонализации проведен в [31], основным результатом которого заключатся в том, что корректировка \mathbf{r}_j не влияет на угол наклона к «плохим» векторам Ритца.

Результаты практического применения алгоритмов на основе метода Ланцоша

Для сравнительного тестирования и уточнения области применения метода к задачам, сформированным МКЭ для механических конструкций, рассматривались простой алгоритм с полной, частичной и выборочной ортогонализацией, а также ленточный алгоритм с полной и выборочной ортогонализацией.

Способы распространения метода, который рассматривался до сих пор для простой проблемы, кратко указан в п. 2.4.2.2. Здесь остановимся на них подробнее. Рассмотрим два подхода, которые при определенных условиях можно применять для решения этой задачи.

1. Если к матрице \mathbf{M} применимо разложение Холецкого $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, можно использовать неявное приведение к стандартной форме. Перепишем уравнение (2.36) в следующем виде:

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{L}^T\mathbf{x} = 0. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Тогда, решив простую проблему собственных значений:

$$(\bar{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{E})\bar{\mathbf{x}} = 0,$$

где $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T}$, легко отыскать собственные пары исходной задачи, поскольку множество собственных значений задач (2.36) и (ПЗ.9) совпадают, а векторы связаны простым соотношением $\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$. Матрица $\bar{\mathbf{A}}$ не вычисляется в явном виде. Произведение $\mathbf{A}\mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{u}_j$ на каждом шаге алгоритма (ПЗ.4) формируется в три этапа:

- a. из уравнения $\mathbf{L}^T\mathbf{h}_1 = \mathbf{q}_j$ находится \mathbf{h}_1 ;
- b. $\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$;
- c. решив уравнение $\mathbf{L}\mathbf{u}_j = \mathbf{h}_1$, находим \mathbf{u}_j ; $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ – вспомогательные векторы.

Множители Холецкого \mathbf{L} наследуют структуру матрицы \mathbf{M} и это ключевой момент, обеспечивающий минимальные затраты при переходе к обобщенной проблеме. Формирование \mathbf{x} требует $(4m+3)N$ операций против N^3 при использовании полной матрицы $\overline{\mathbf{A}}$.

2. Подход, рассмотренный выше, оптимален по быстродействию. Однако он применим, только если матрица \mathbf{M} может быть факторизована. Таково, вообще говоря, теоретическое условие применения любой формулировки метода Ланцоша. Однако на практике накапливаемые ошибки округлений могут привести к провалу процедуры факторизации \mathbf{M} , разложимой в точной арифметике. Использование перестановок с целью подавления ошибок округлений приводит к разрушению структуры \mathbf{M} и, как следствие, резкому увеличению потребности в ресурсах ЭВМ.

В таких случаях целесообразно вычислительную схему алгоритма Ланцоша непосредственно распространить на пару матриц (\mathbf{A}, \mathbf{M}) , то есть перевести вычисления по формуле (ПЗ.3) в пространство матрицы \mathbf{M} . Тогда она принимает следующий вид:

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_{j+1}\beta_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{q}_j - \mathbf{M}\mathbf{q}_j\alpha_j - \mathbf{M}\mathbf{q}_{j-1}\beta_j. \quad (\text{ПЗ.10})$$

Неприятным моментом реализации алгоритма в таком виде является необходимость решения уравнения

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{r}_{j+1} \quad (\text{ПЗ.11})$$

итерационными методами на каждом шаге алгоритма.

Автором реализованы оба подхода. Выбор модификации определяется в основном размером задачи. Весьма желательно проведение вычислений в оперативной памяти, поскольку использование жесткого диска резко снижает их эффективность. Возможности реализации метода в форме (ПЗ.9) в этом отношении ниже, чем у варианта (ПЗ.10), поскольку необходимо хранить профиль множителя \mathbf{L} , который в некоторых случаях невозможно разместить в памяти даже теоретически.

Далее опишем некоторые ключевые моменты в поведении алгоритмов Ланцоша, характерные для всех модификаций. Они установлены автором на этапе тестовых вычислений и учтены в окончательной реализации.

Быстрая сходимость верхнего края спектра

Во всех случаях применения любой из названных выше модификаций метода Ланцоша наблюдалась быстрая сходимость верхнего края спектра, и *никогда* первое нижнее значение не сходилось ранее, чем после вычисления 70% спектра сверху. Интуитивно это обстоятельство объясняется тем, что в основе алгоритма неявно лежит прямая итерация Aq , хотя на строгость такое объяснение не претендует. В некоторых публикациях в качестве меры сходимости приводится соотношение $(\lambda_{i+1} - \lambda_i)/(\lambda_n - \lambda_1)$, которое все объясняет. Однако строгого доказательства этого факта автор не обнаружил.

Сходимость к верхнему краю неблагоприятна и даже неприемлема для больших задач, поскольку инженера интересуют низшие собственные частоты и соответствующие формы конструкции. Как указано в п. 2.4.2.2, предлагается решать обратную задачу (2.41). Теперь отсутствие сходимости нижнего края спектра выглядит как весьма благоприятное обстоятельство, поскольку практически без риска контроль в этой части спектра можно отключить.

Матрица жесткости, которая подлежит факторизации, может быть положительно полуопределена, то есть иметь нулевые собственные значения. Простым примером такой ситуации может служить задача расчета собственных частот свободного тела. В этом случае разложение A невозможно и приходится затратить некоторые усилия, чтобы преодолеть этот неприятный момент. Проще всего слегка «привязать» конструкцию. То есть ввести упругие элементы малой жесткости, связывающие конструкцию с базой, чтобы устранить сингулярность матрицы A .

Другим способом устранения вырожденности A является дополнение ее матрицами ранга 1. Пусть x_r – собственный вектор, соответствующий перемещению подсистемы как твердого тела. Он соответствует нулевому собственному

му значению и может быть выбран как решение матричного уравнения с использованием \mathbf{A} . Тогда вместо \mathbf{A} для поиска собственных пар можно использовать $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \delta \mathbf{x}_r \mathbf{x}_r^T$, где в качестве δ можно выбрать любое число, желательно за пределами интересующего частотного диапазона. Понятно, что в спектре задачи теперь присутствует собственная пара (δ, \mathbf{x}_r) . Влияние обоих способов корректировки сказывается в четвертом-пятом знаке для первых собственных значений, что весьма приемлемо. Однако второй способ нельзя признать удачным, поскольку в результате преобразований почти всегда ухудшается структура матрицы \mathbf{A} .

Заметим, что решение уравнения (2.36) в рамках построения гибридных моделей не сталкивается с проблемой сингулярности \mathbf{A} , если для редуцирования уравнений движения используется метод связанных подструктур, рассмотренный в параграфе 2.3.

Сравнение реализаций

Применение всех упомянутых выше алгоритмов приводит к одинаковому результату. Это ожидаемый и весьма желательный итог. Поэтому далее внимание переключается на сравнение потребностей в ресурсах для различных модификаций. Следует отметить, что эффективность алгоритмов зависит от структуры спектра задачи. Метод превосходно работает в случае простых, хорошо разделенных значений. Некоторые принципиальные сложности появляются, если в спектре присутствуют кратные и очень близкие значения. Поэтому разделим рассмотрение для указанных случаев.

Простые значения

При отсутствии кратных значений в спектре нет никакой необходимости использовать ленточные алгоритмы. Поэтому основной вопрос – что эффективнее простые алгоритмы с полной, частичной или выборочной ортогонализацией?

В свете вышесказанного, несколько неожиданным выглядит вывод о том, что полная ортогонализация предпочтительней выборочной, по крайней мере,

если не используется вторичная память. Причин тому несколько. Во-первых, полная ортогонализация непосредственно поддерживает необходимое качество базиса Ланцоша. Поэтому нет никакой необходимости вычислять векторы Ритца до того момента, когда сойдутся *все* интересующие собственные значения. *Все* необходимые векторы сходятся, как правило, через 3-4 шага. Выборочный алгоритм вынужден вычислять пары Ритца сразу после начала сходимости первой же пары. На последних шагах метода число сошедшихся и хороших векторов Ритца вполне сопоставимо с размером базиса Ланцоша, то есть j , следовательно, сопоставима и стоимость ортогонализации. Однако, нужно добавить затраты на контроль сходимости и вычисления векторов Ритца для выборочного алгоритма. Кроме того, потеря ортогональности векторов Ритца немедленно сказывается на векторах Ланцоша. Рекомендуемая в таких случаях процедура Грамма-Шмидта весьма ресурсоемкая и не совсем ясен критерий, когда ее проводить.

Во-вторых, идея очищать \mathbf{q}_{j+1} от $\mathbf{y}_i, i \in G_j$, в алгоритме с выборочной ортогонализацией только при появлении новых пороговых векторов нашла свое подтверждение лишь отчасти. Если необходимо найти небольшое число собственных пар, скажем 10 (размер задачи существенно больше), то алгоритм не успевает «рассыпаться». Если нужно 100 пар, то ортогональность базиса удается сохранить только путем очищения \mathbf{q} от сошедшихся векторов Ритца *на каждом шаге метода*; во многих случаях подобная ситуация не выходит за рамки первоначальной идеологии, поскольку именно с такой частотой возникают пороговые векторы. В лучшем случае выборочная ортогонализация проигрывает по быстрдействию в 2 раза. Таков результат, полученный автором. Он согласуется с результатами статьи [57].

Частичная ортогонализация выигрывает у полной, и это вполне естественно. Однако этот выигрыш ощутим только в случаях, когда для хранения \mathbf{Q} используется вторичная память (жесткий диск). К тому же, частичная ортогонализация обеспечивает худшее качество базиса Ланцоша, что определяется условиями формулировки, а именно $\sqrt{\varepsilon}$ для максимального значения косинуса углов на-

клона в случае частичной ортогонализации против ε - для полной. В этой ситуации решающими факторами являются скорость сходимости и требуемая точность вычисляемых величин для обеих формулировок.

Кратные значения

Наличие в спектре задачи кратных или очень близких значений привносит новые черты в поведение алгоритмов. Основные сложности связаны с идентификацией собственных значений, поскольку нарушается монотонность сходимости от края спектра к его середине. Кратные собственные значения внедряются в уже стабилизированную (сошедшуюся и почти сошедшуюся) часть спектра и определяют новую границу стабилизации. Алгоритм с полной ортогонализацией выходит из этой ситуации без потерь, просто изменив значение соответствующей переменной. При выборочной ортогонализации необходимо пересчитать все векторы Ритца за границей сходимости. Более того, сходимость внедрившейся пары может изменить сошедшийся ранее кратный вектор, который из разряда сошедшихся может перейти в «хорошие» или даже не быть таковым. Это объясняется поворотом базиса кратного подпространства, в связи с чем необходимо следить за его групповой сходимостью, то есть контролировать угол между кратными подпространствами, а не отдельными кратными векторами в ходе расчета. Угол между подпространствами, вообще говоря, определяется по формуле:

$$\angle(S_i, S_j) \equiv \arccos \lambda_1[(S_i^T S_j S_j^T S_i)^{1/2}],$$

где S_j, S_i - матрицы размером $n \times m$, столбцами которых являются векторы базиса подпространств соответственно S_j, S_i , m - размер подпространств. Однако в алгоритме Ланцоша проводить такие вычисления нет необходимости, поскольку формулы (ПЗ.8) по-прежнему справедливы. Напомним, что кратные векторы, конечно, должны быть ортонормальны.

Приложение 4. Формат файла input.fum

При описании формата примем следующие соглашения об обозначении размеров хранимых величин в байтах:

- byte – 1 ;
- integer – 4;
- double – 8.

Блоки информации будем идентифицировать по обозначению, которое присваивается при необходимости. Индексы массивов однотипных данных будем указывать в квадратных скобках. Значение в квадратных скобках, указанное в колонке «обозначение блока информации» означает размер массива данных. Отсутствие информации в колонке «Смещение от начала файла» означает последовательную запись данных, описанных в соседних строках. В таблице будут использованы обозначения:

- QGenCoor = QDOF×QNodes;
- SizeGenMatr = QEForms+QSForms.

Определения величин в правой части равенств даны в таблице.

Таблица П1.

Формат файла input.fum

№ п.п.	Смещение от начала файла	Обозначение блока информации	Наименование блока информации, пояснения	Размер
1	0		ASCII коды строки «UMFEM»	5
2	5	AddressTable	смещение блоков информации от начала файла	6×integer
3	AddressTable[1]	Title	заголовочная информация	
Структура Title				
3.1			размер блока заголовочной информации	integer
3.2			дата создания в компактной форме ДДММГГГГ	integer
3.3			время создания в компактной форме ЧЧММССмлс	integer
3.4		lProgName	длина наименования программы подготовки данных	byte
3.5			наименование программы подготовки данных (коды ASCII)	lProgName
3.6		lTitleSolution	длина заголовка имени решения	byte
3.7			имя решения (коды ASCII)	lTitleSolution
3.8		lSolComment	длина комментария к решению	byte

3.9			комментарий к решению (коды ASCII)	ISolComment
3.10		MaxNumNode	максимальный номер узла	integer
3.11		QNodes	число узлов, использованное в решении	integer
3.12		MaxNumFE	максимальный номер конечного элемента модели	integer
3.13		QFElements	число конечных элементов в модели	integer
3.13			признак единиц измерения	integer
3.14		QDOF	число степеней свободы в узле	integer
3.15			номера степеней свободы в узле	QDOF× integer
4	AddressTable[2]	typFE	типы конечных элементов	
Структура typFE				
4.1			общий размер таблицы	integer
4.2		QTypFE	число типов КЭ в таблице	integer
4.3		typFERec [QTypFE]	записи типов КЭ	
Структура typFERec[i]				
4.3.1		FEType	идентификатор типа	byte
4.3.2		QTypeNodes	число узлов в КЭ	byte
4.3.3		QPoligons	число полигонов, используемых для отображения КЭ	byte
4.3.4		PoligonRec [QPoligons]	полигоны	
Структура PoligonRec[i]				
4.3.4.1		QVertex	число вершин полигона	
4.3.4.2			номера вершин полигона	QVertex
5	AddressTable[3]	numNodes [QNodes]	номера узлов	QNodes× Integer
6	AddressTable[4]	coordNodes [QNodes]	координаты узлов: последовательность записей (номер, x, y, z)	4×QNodes× double
7	AddressTable[5]	FERec [QFElements]	записи конечных элементов	
Структура FERec[i]				
7.1			номер	integer
7.2			идентификатор типа, определенный в typFE	integer
7.3			номера узлов	QTypeNodes ×integer
8	AddressTable[6]	Solution	Решение	
Структура Solution				
8.1		SolutionTable [11]	таблица с общей информацией о решении	11×integer
Структура SolutionTable				
8.1.1		QForms	число собственных форм	
8.1.2		QSForms	число статических форм	
8.1.3		QCDOF	число граничных условий	
8.1.4			Признак ортогональности	

8.1.5			Вариант нормировки	
8.1.6			Смещение от начала решения диагональной матрицы масс	
8.1.7			Смещение от начала решения блока информации о связях	
8.1.8			Смещение от начала решения блока частот	
8.1.9			Смещение от начала решения блока форм	
8.1.10			Смещение от начала решения обобщенной матрицы масс	
8.1.11			Смещение от начала решения обобщенной матрицы жесткости	
8.2	AddressTable[6]+ SolutionTable[6]	LMassMatrix [QGenCoor]	Диагональная матрица масс	QGenCoor× double
8.3	AddressTable[6]+ SolutionTable[7]	BNum [QCDOF], BValue [QCDOF]	Граничные условия. Последовательная запись массивов integer и double размером QCDOF. Пара элементов integer и double с одинаковыми индексами определяют одно граничное условие. Формат: (integer div 32) - номер узла, (integer mod 32) – номер степени свободы в узле, double – значение граничного условия: 0 – степень свободы закреплена, 1 – интерфейсная степень свободы	QCDOF× (integer+ double)
8.4	AddressTable[6]+ SolutionTable[8]	PValue [QE-Forms]	Частоты	QEForms× double
8.5	AddressTable[6]+ SolutionTable[9]	EForms [QE-Forms], SForms [QSForms]	Формы: последовательная запись QEForms собственных и QSForms статических форм	SizeGenMatr ×QGen- Coor×double
8.6	AddressTable[6]+ SolutionTable[10]	GMassMatrix [SizeGenMatr, SizeGenMatr]	Обобщенная матрица масс: построчное хранение плотной матрицы	SizeGenMatr × SizeGenMatr ×double
8.7	AddressTable[6]+ SolutionTable[11]	GStiffMatrix [SizeGenMatr, SizeGenMatr]	Обобщенная матрица жесткости: построчное хранение плотной матрицы	SizeGenMatr × SizeGenMatr ×double