



Начинаем работать в программном комплексе «Универсальный механизм»

2024

Это руководство поможет вам освоить работу с программным комплексом «Универсальный механизм». Руководство посвящено созданию и исследованию ряда простых механических систем. Уроки даны по принципу «от простого к сложному». Предполагается, что вы будете изучать уроки последовательно, как они представлены в данном руководстве. Некоторые разделы руководства посвящены изучению особенностей отдельных модулей программы, о чем будет сказано в начале таких разделов

Начинаем работать в программном комплексе «Универсальный механизм»

Это руководство поможет вам освоить работу с программным комплексом «Универсальный механизм». Руководство основано на создании и исследовании ряда простых механических систем. Уроки даны по принципу «от простого к сложному». Предполагается, что вы будете изучать уроки последовательно, как они представлены в данном руководстве. Некоторые разделы руководства посвящены изучению особенностей отдельных модулей программы, о чем будет сказано в начале таких разделов.

Контактная информация

Самая последняя версия программы и руководства пользователя доступны по адресу www.universalmechanism.com/pages/index.php?id=3.

Сообщения об ошибках в программе и документации, ваши замечания и предложения шлите по адресу um@universalmechanism.com.

Почтовый адрес:

Россия, 241035, г. Брянск, бул. 50-летия Октября, 7

ООО «Вычислительная механика»

проф. Погорелову Дмитрию Юрьевичу.

Телефон/факс: +7 (4832) 568637.

Оглавление

НАЧИНАЕМ РАБОТАТЬ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ».....	2
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК	5
1.1. ЧТО МЫ ИЗУЧИМ	5
1.2. СОЗДАНИЕ СХЕМЫ ОБЪЕКТА.....	6
1.3. СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ	7
1.3.1. Запуск UM Input и создание нового объекта моделирования	7
1.3.2. Основные элементы интерфейса пользователя	7
1.3.3. Создание графических образов.....	8
1.3.3.1. Образ сцены	8
1.3.3.2. Образ маятника	13
1.3.4. Создание тел.....	14
1.3.5. Создание шарниров	15
1.3.6. Сохранение введенных данных	16
1.3.7. Переход к моделированию движения	16
1.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА	17
2. ГРУЗ НА ПРУЖИНЕ	25
2.1. ЧТО МЫ ИЗУЧИМ	25
2.2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ	25
2.3. СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ	26
2.3.1. Запуск UM Input и создание нового объекта моделирования	26
2.3.2. Создание графических образов.....	26
2.3.3. Создание тел.....	31
2.3.4. Создание шарниров	33
2.3.5. Описание сил.....	36
2.3.6. Визуализация пружины и демпфера	37
2.3.7. Дополнительные параметры	39
2.3.8. Подготовка к моделированию	41
2.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ	42
2.4.1. Свободные колебания.....	42
2.4.2. Статистический анализ.....	47
2.4.3. Статический и линейный анализ	49
2.4.4. Вынужденные колебания	52
3. КОНСОЛЬНАЯ БАЛКА	54
3.1. ЧТО МЫ ИЗУЧИМ	54
3.2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ	54
3.3. СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ	55
3.3.1. Создание графических объектов	55
3.3.2. Создание тел.....	57
3.3.3. Создание шарниров	58
3.3.4. Подготовка к моделированию	60

3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ	61
3.4.1. Расчет положения равновесия	61
3.4.1.1. Расчет положения равновесия численным решением уравнений равновесия	61
3.4.1.2. Расчет положения равновесия методом интегрирования уравнений движения	62
3.4.2. Расчет собственных частот и форм колебаний	63
3.4.3. Потеря устойчивости по Эйлеру	66
3.4.4. Большие прогибы	68
4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ	74
5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	75

1. Математический маятник¹

1.1. Что мы изучим

В этом уроке мы научимся создавать новую модель, добавлять в нее тела и шарниры, проводить синтез и компиляцию уравнений движения, запускать моделирование динамики моделируемого объекта, а также строить графики различных величин. В целом урок призван дать вам общее представление о последовательности моделирования механических систем в ПК «Универсальный механизм».

В конце данного раздела мы создадим модель маятника, которая будет включать одно твердое тело – собственно маятник, один вращательный шарнир, и, кроме того, графический образ неподвижных частей – стойки, см. рис. 1.1. После описания модели мы пройдем этапы синтеза и компиляции уравнений движения, а затем перейдем непосредственно к моделированию движения нашей модели. Готовую модель вы можете найти в каталоге:

[{Данные УМ}\SAMPLES\TUTORIAL\pendulum](#)

или скачать по адресу:

www.universalmechanism.com/download/90/rus/pendulum.zip.

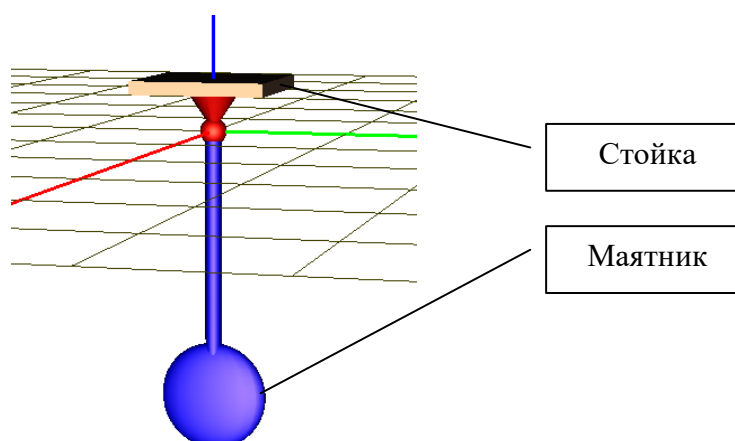


Рис. 1.1. Модель маятника

¹ **Математический маятник** — механическая система, состоящая из материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне в поле тяжести

1.2. Создание схемы объекта

До начала моделирования маятника с использованием УМ мы рекомендуем нарисовать его схему на бумаге, наподобие той, что представлена на рис. 1.2. Как вы видите, мы нарисовали простой маятник и выбрали две системы координат (СК): базовую (инерциальную) систему координат $Ox_0y_0z_0$ (СК0) и систему координат, связанную с телом (СК1) с началом в центре масс тела, оси совпадают с главными осями инерции (в данном случае они являются осями симметрии маятника). Базовая система координат всегда присутствует в любом объекте и, как правило, связывается с Землей. Относительно этой системы координат описывается положение элементов объекта.

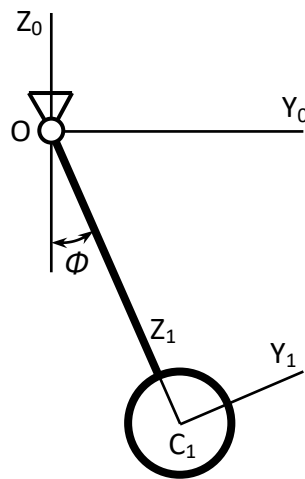


Рис. 1.2. Схема маятника

1.3. Создание модели

1.3.1. Запуск UM Input и создание нового объекта моделирования

Для запуска программы описания моделей **UM Input**:

1. Выберите кнопку **Пуск**.
2. Выберите пункт **Программы** (пункт **Все программы** в Windows 7).
3. Выберите пункт **Универсальный механизм 9 | UM Input**.

Для создания новой модели:

4. Выберите пункт меню **Файл | Новый объект...**
Появится окно конструктора для описания новой модели, см. рис. 1.3.

1.3.2. Основные элементы интерфейса пользователя

До того, как продолжить описание модели, ознакомимся с основными элементами окна конструктора, см. рис. 1.3.

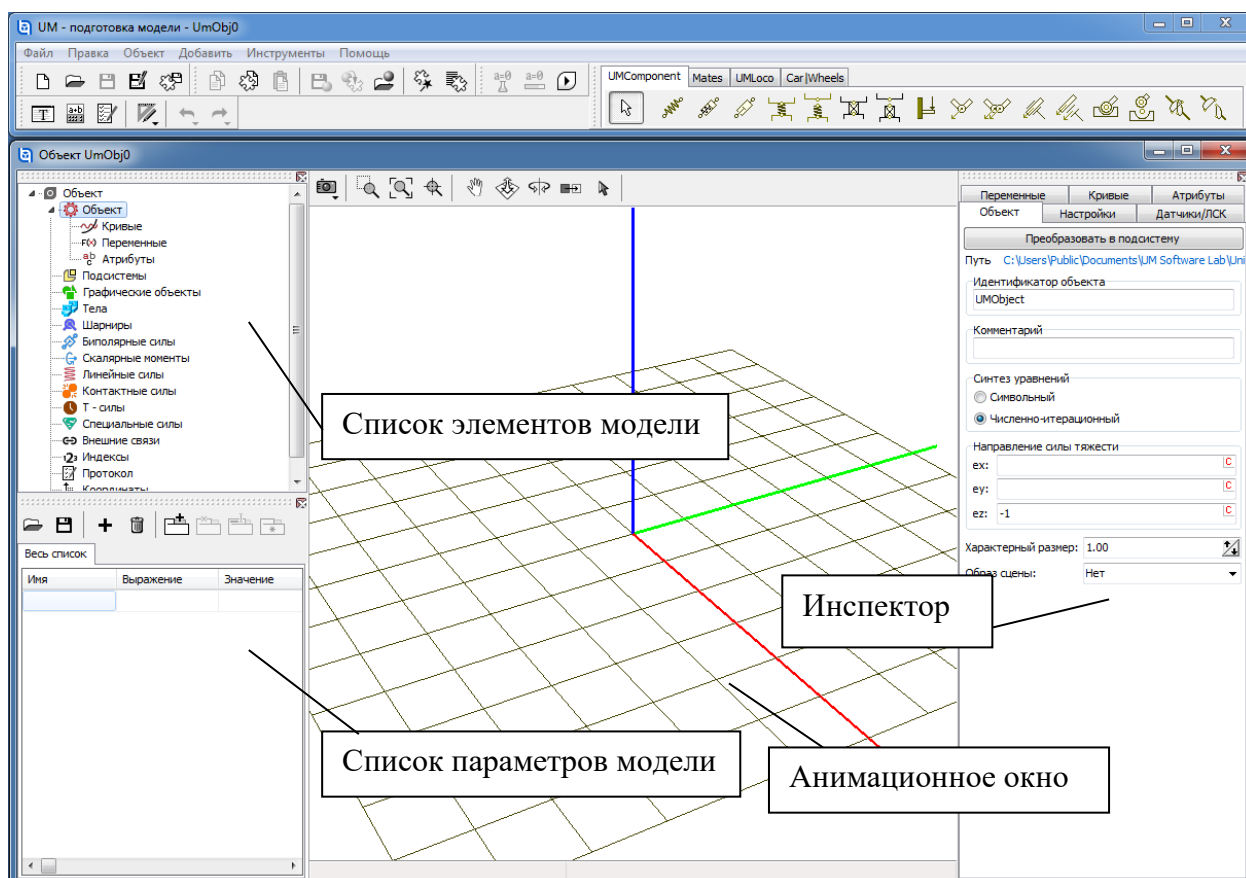


Рис. 1.3. Окно конструктора **UM Input**

Список элементов модели в левой верхней части конструктора используется для быстрого доступа к отдельному элементу по его имени.

Анимационное окно в центре конструктора отображает визуально конструируемый объект. В окне изображена базовая система координат, для осей используется цветовая идентификация RGB: **красный (Red) – ось X**, **зеленый (Green) – ось Y**, **синий (Blue) – ось Z**. Повороты камеры, приближение/удаление объекта, изменение типа графики (каркасная/объемная) выполняются с помощью кнопок в верхней части окна. Через контекстное меню можно настроить перспективу, задать опорную сетку и так далее.

Инспектор в правой части является основным инструментом создания элементов и в каждый момент времени отображает параметры активного элемента.

1.3.3. Создание графических образов

Мы рекомендуем начинать описание любой механической системы с создания набора *Графических объектов (ГО)* – образов элементов конструкции (тел, силовых элементов, окружающей среды).

1.3.3.1. Образ сцены

Создание нового графического объекта – образа сцены

Сценой назовем рисунок, соответствующий неподвижным элементам объекта. Для сцены (создание которой вообще-то не обязательно) создается отдельный ГО. В случае маятника сцене будет принадлежать изображение неподвижного шарнира (стойки), к которому прикрепляется маятник. Для создания соответствующего образа выполните следующие действия:

1. Перейдите на ветку **Графические объекты** в списке элементов модели.
2. Для добавления нового графического объекта щелкните на кнопке **+** в верхней части инспектора, см. рис. 1.4.



Рис. 1.4. Добавление нового элемента

Замечание. Таким же образом происходит добавление новых элементов других типов.

Переименование графического объекта

По умолчанию, вновь созданному графическому объекту присваивается стандартное имя **GO1**. Переименуем графический объект в **Стойка**.

3. Перейдите в поле имени графического объекта и введите **Стойка** и нажмите *Enter*, см. рис. 1.5.

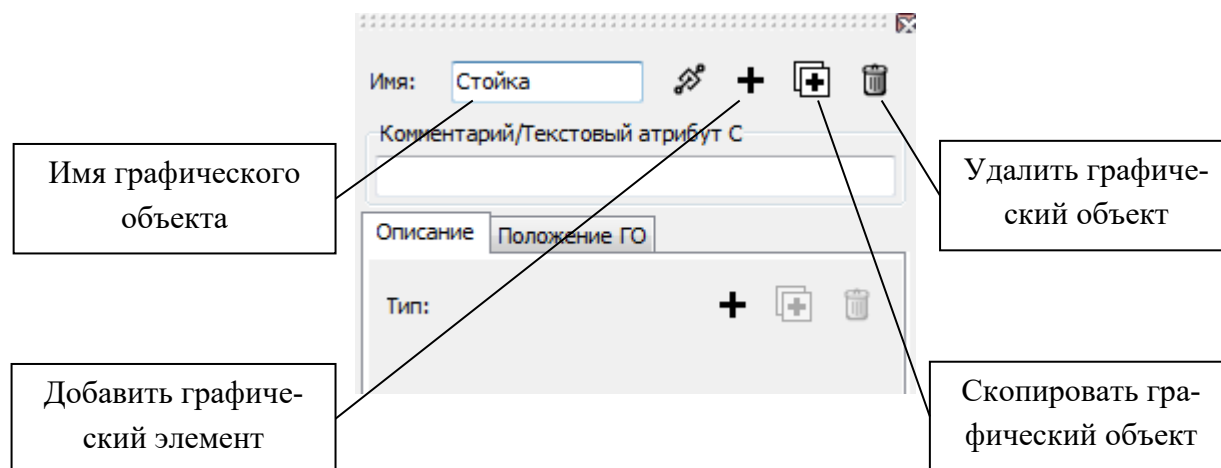


Рис. 1.5. Переименование графического объекта в Инспекторе

Создание графических элементов

Каждый *графический объект* может состоять из произвольного числа *графических элементов* (примитивов, ГЭ), что позволяет создавать весьма сложные образы. В нашем случае создадим три элемента - шар, конус и параллелепипед, которые вместе и образуют образ стойки.

Создание нового графического элемента: шар

1. Нажмите кнопку **Добавить графический элемент**, см. рис. 1.6.
2. Образовалась новая вкладка с именем, см. рис. 1.6
3. Выберите тип нового *графического элемента* – **Эллипсоид**. Теперь вкладка также имеет имя **Эллипсоид**.
4. На вкладке **Параметры** задайте полуоси эллипсоида $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0.05$.
5. Перейдите на вкладку **Цвета** и выберите **красный** цвет в качестве диффузного.

Создание нового графического элемента: конус

6. Добавьте новый *графический элемент* и выберите его тип – **Конус**.

Замечание: Не путайте создание нового *графического объекта* и создание новых *графических элементов* (примитивов) в рамках одного *графического объекта*. В данном примере мы создаем один *графический объект* – **Стойка**, который будет включать три *графических элемента*: шар, конус и параллелепипед.

7. На вкладке **Параметры** установите $\mathbf{R2} = 0.1$; $\mathbf{R1} = 0$; $\mathbf{h} = 0.15$.
8. Перейдите на вкладку **Цвета** и выберите **красный** цвет в качестве диффузного.

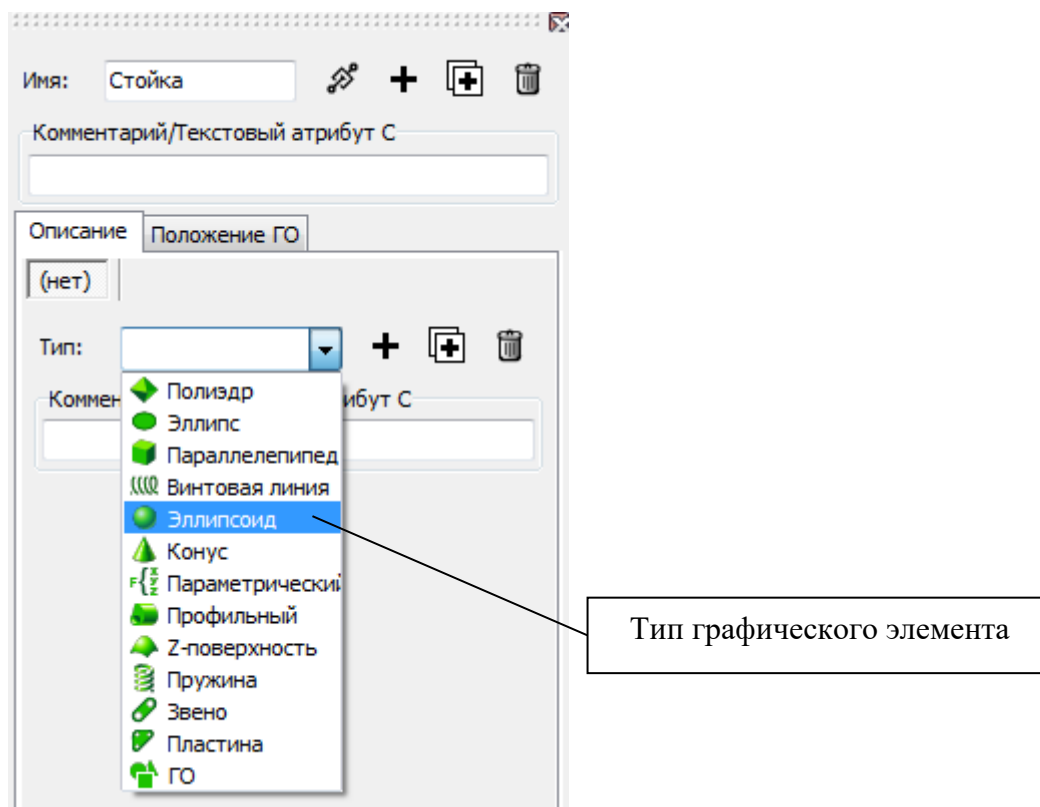


Рис. 1.6. Выбор типа графического элемента

Создание нового графического элемента: параллелепипед

9. Добавьте новый *графический элемент* и выберите его тип – **Параллелепипед**.
10. На вкладке **Параметры** установите **A = 0.5; B = 0.5; C = 0.05**.
11. Перейдите на вкладку **Положение ГЭ**. В поле **Z**, группы **Сдвиг** установите **0.15**, см. рис. 1.7.

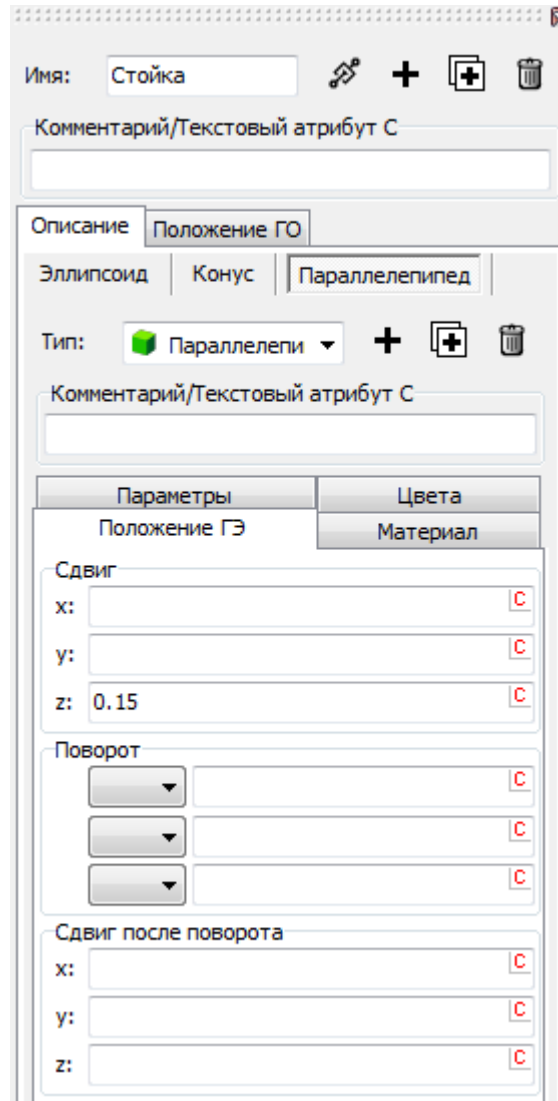


Рис. 1.7. Изменение положения графического элемента

Назначение графического объекта образу сцены

12. Перейдите на ветку **Объект** в списке элементов модели.
13. В поле **Образ сцены** выберите **Стойка**, см. рис. 1.8.

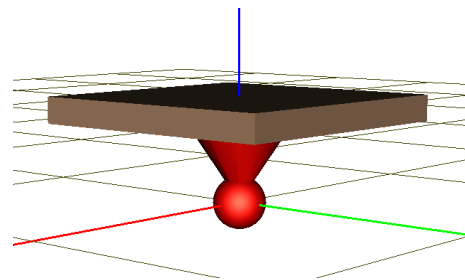
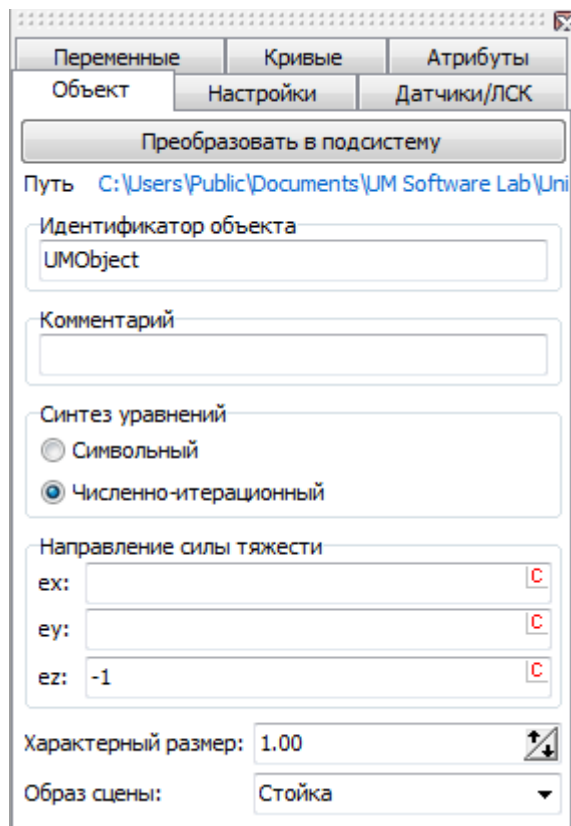


Рис. 1.8. Выбор образа сцены

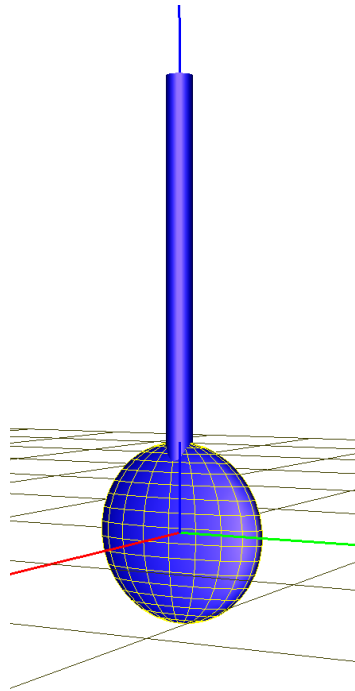
1.3.3.2. Образ маятника

1. Вернитесь на ветку **Графические объекты** в списке элементов модели.
2. Создайте новый графический объект.
3. Переименуйте второй графический объект в **Маятник**.

Замечание: Обратите внимание, что после ввода любых данных следует нажимать клавишу **Enter**, чтобы введенная информация тут же обрабатывалась программой.

Образ маятника будем изображать двумя графическими элементами: эллипсоидом и конусом.

4. Добавьте новый графический элемент **Эллипсоид** с параметрами **a = 0.05; b = 0.2; c = 0.2**. Выберите **синий** цвет в качестве диффузного.
5. Добавьте новый графический элемент **Конус** с параметрами **R2 = 0.03; R1 = 0.03; h = 1**. Выберите **синий** цвет в качестве диффузного.



Графический образ маятника создан.

1.3.4. Создание тел

Маятник как механическая система образован единственным телом.

Переименуйте новое тело в **Маятник**.

1. Для его описания выберите ветку **Тела** в списке элементов модели.
2. Создайте новое тело так же как новый графический объект – щелкнув по кнопке **Добавить новый элемент** в панели инспектора справа, см. рис. 1.9.

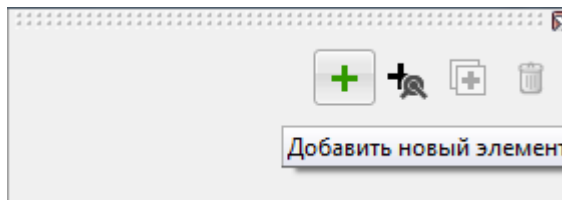


Рис. 1.9. Добавить новое тело

3. Переименуйте новое тело в **Маятник**.
4. Выберите графический образ **Маятник** из списка доступных графических образов.
5. В поле **Масса** поставьте 1 (кг), см. рис. 1.10.

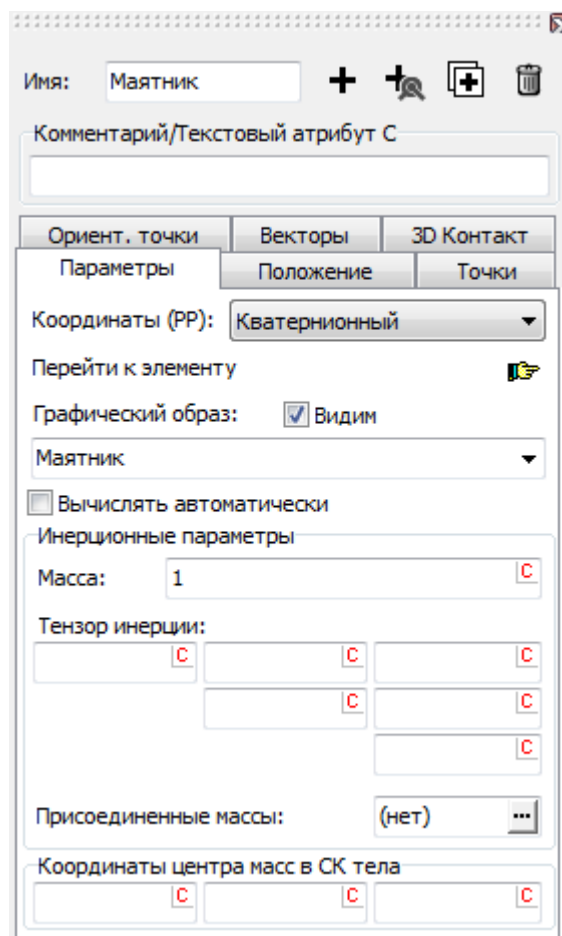


Рис. 1.10. Создание тела **Маятник**

1.3.5. Создание шарниров

Маятник и стойку связывает вращательный шарнир. Для его создания выполните следующие операции.

1. В дереве элементов модели выберите **Тела | Маятник**.
2. В инспекторе нажмите кнопку **Перейти к элементу**.
3. В появившемся списке выбрать раскрывающийся пункт меню **Создать шарнир**, затем выберите **Вращательный**.

После этого автоматически будет создан вращательный шарнир с именем **jМаятник**, связывающий базу (Base0, СК0) и маятник. Шарнирные точки и шарнирные векторы определяют положение оси вращения относительно каждого тела.

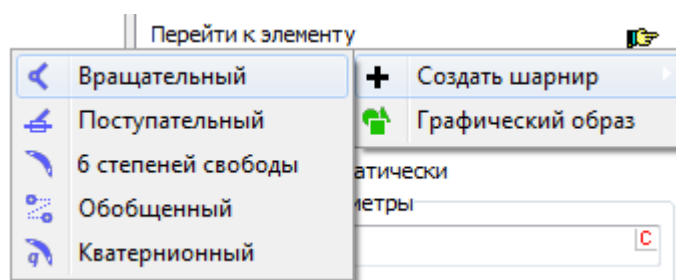


Рис. 1.11. Создание нового вращательного шарнира

4. В поле **Шарнирные точки | Маятник** задайте компоненте **Z** значение **1**. Таким образом, мы заставим маятник вращаться вокруг своей верхней точки, см. рис. 1.12

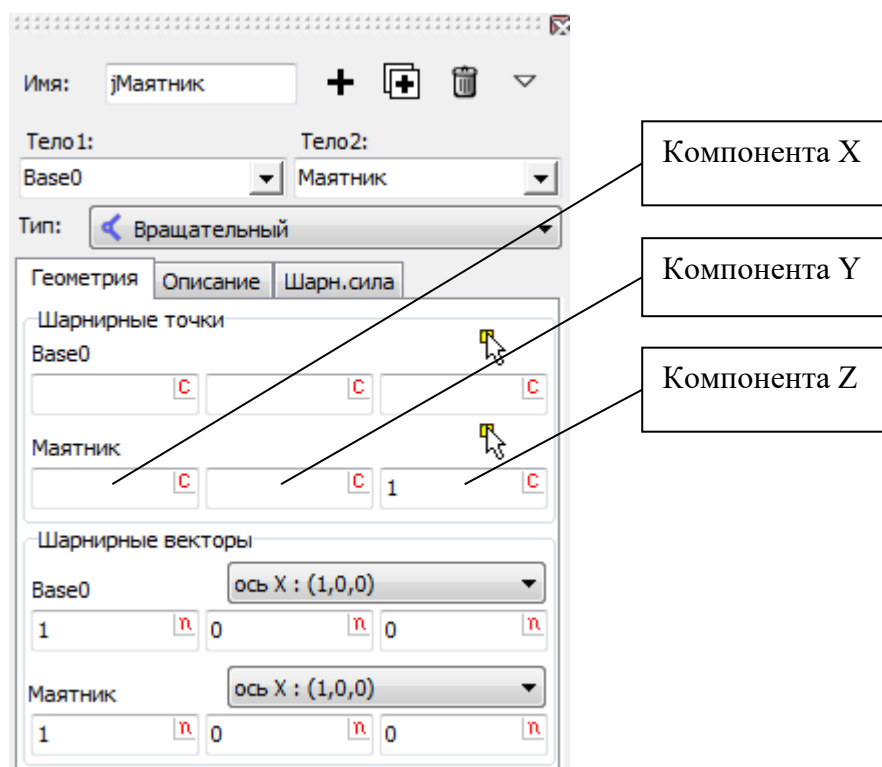


Рис. 1.12. Параметры вращательного шарнира

1.3.6. Сохранение введенных данных

После того, как мы описали тело и шарнир, модель маятника описана полностью. Самое время сохранить все введенные данные. По умолчанию модель называлась **UmObj0**, дадим модели новое имя – **Pend**.

1. Выберите пункт меню **Файл | Сохранить как...**
2. В поле полный путь введите **{Путь к модели}\Pend**, как показано на рис. 1.13.

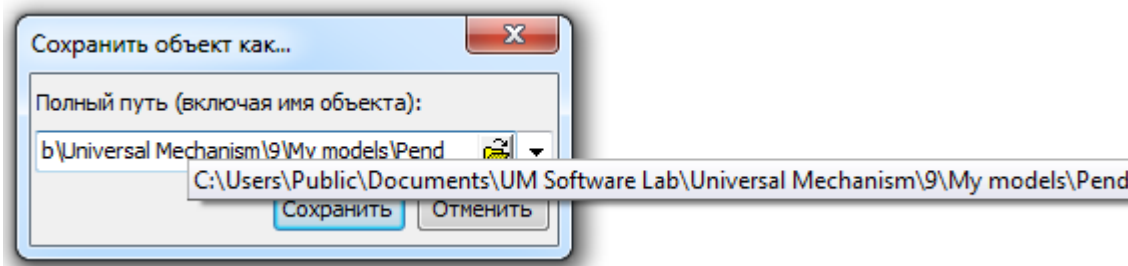


Рис. 1.13. Сохранение данных

1.3.7. Переход к моделированию движения

Модель готова для загрузки в программу моделирования динамики. Для запуска программы моделирования движения **UM Simulation** с открытием в ней текущей модели выберите пункт меню **Объект | Моделирование....**

1.4. Моделирование движения маятника


Мы находимся в программе моделирования движения. Сейчас мы откроем новое анимационное окно, отклоним маятник на один радиан от вертикального положения и запустим моделирование движения.

Создание нового анимационного окна

1. Одно анимационное окно открывается программой по умолчанию. Если по каким-то причинам вы не видите анимационного окна, то откройте его с помощью пункта меню **Инструменты | Анимационное окно...** Появится новое анимационное окно с изображением загруженной модели.


Познакомимся с тем, как управлять положением камеры в анимационном окне.

Поворот

На панели инструментов анимационного окна нажмите кнопку . Курсор мыши в анимационном окне примет вид, который показан на рисунке справа. Нажмите левую кнопку мыши и, перемещая мышью, вращайте модель в анимационном окне. Пункт **Стиль поворота** контекстного меню анимационного окна дает возможность выбора стиля поворота. **X-, Y- и Z-стили** удобно использовать в моделях, где объект(ы) вытянут вдоль соответствующей оси.




Перемещение

На панели инструментов анимационного окна нажмите кнопку . Курсор мыши в анимационном окне примет вид, который показан на рисунке справа. Нажмите левую кнопку мыши и, перемещая мышью, перемещайте модель в анимационном окне.



Приближение/Удаление

На панели инструментов анимационного окна нажмите кнопку . Курсор мыши в анимационном окне примет вид, который показан на рисунке справа. Приблизжайте/удаляйте модель, нажав левую кнопку мыши и перемещая мышью. Кроме того, для изменения масштаба можно использовать колесо мыши.



Немного поупражнявшись с работой в анимационном окне, вы можете получить что-то похожее на то, что показано на рис. 1.14.

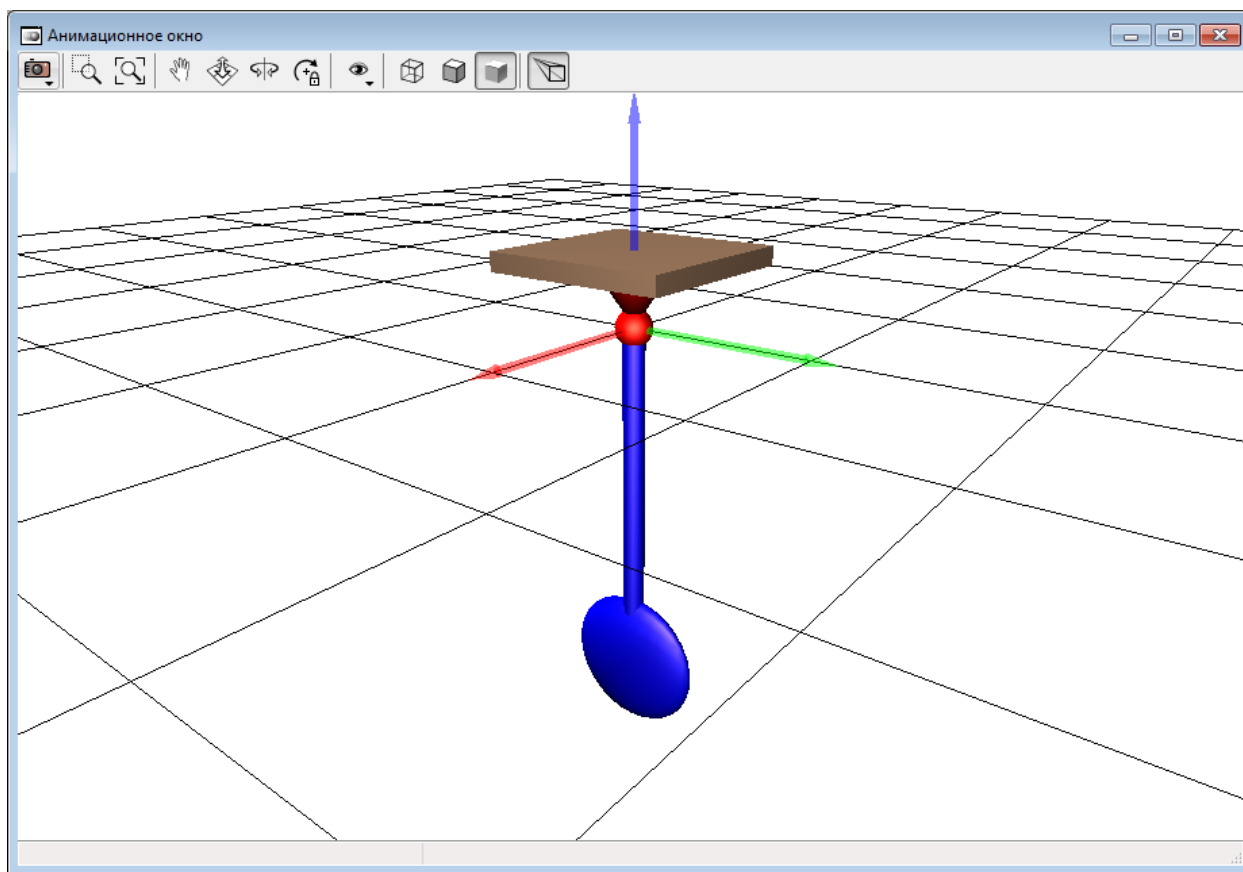


Рис. 1.14. Модель маятника в анимационном окне

Переход в режим моделирования

2. Выберите пункт меню **Анализ | Моделирование...**

Появится окно **Инспектора моделирования объекта**, см. рис. 1.15.

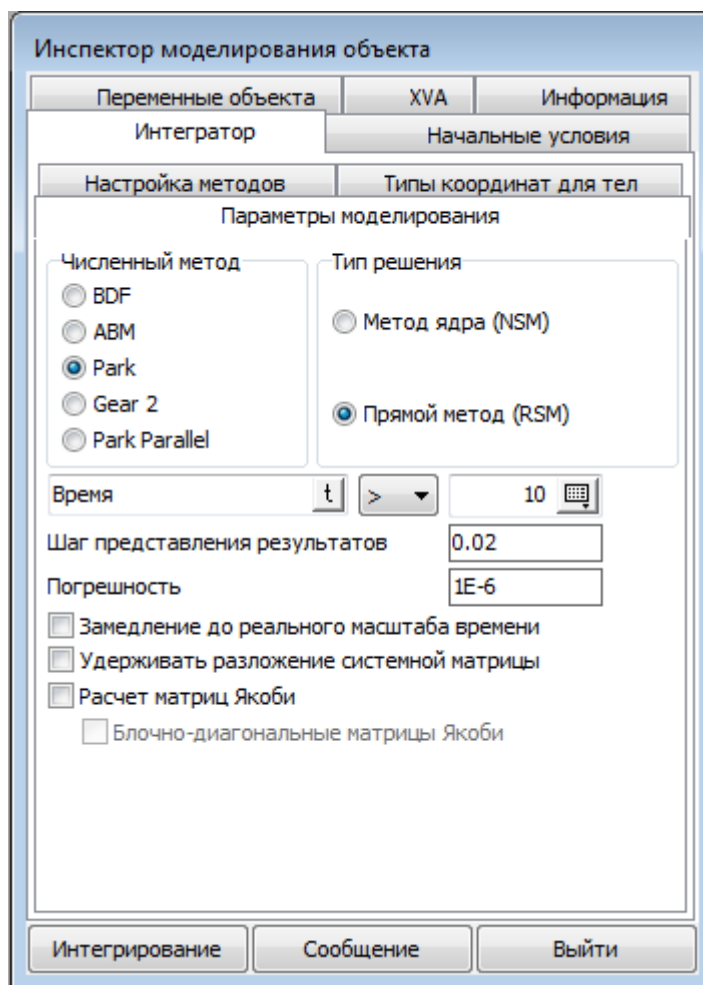


Рис. 1.15. Окно **Инспектора моделирования объекта**

Задание начальных условий

Чтобы наш маятник закачался его нужно предварительно отклонить. Для этого воспользуемся диалогом задания начальных условий.

3. Перейдите на вкладку **Начальные условия | Координаты Инспектора моделирования объекта**.

Сейчас вы видите список всех координат системы. Для нашего маятника это одна координата в шарнире **jМаятник**.

4. Введите в поле **Координата** значение **1**. Нажмите клавишу **Enter**.

В анимационном окне маятник повернется на 1 радиан, см. рис. 1.16.

Замечание. Не забывайте нажимать клавишу **Enter**, чтобы вводимые данные тут же отражались программой. Помните также, что в программе используется система **СИ**. Размерность угловых величин – радианы.

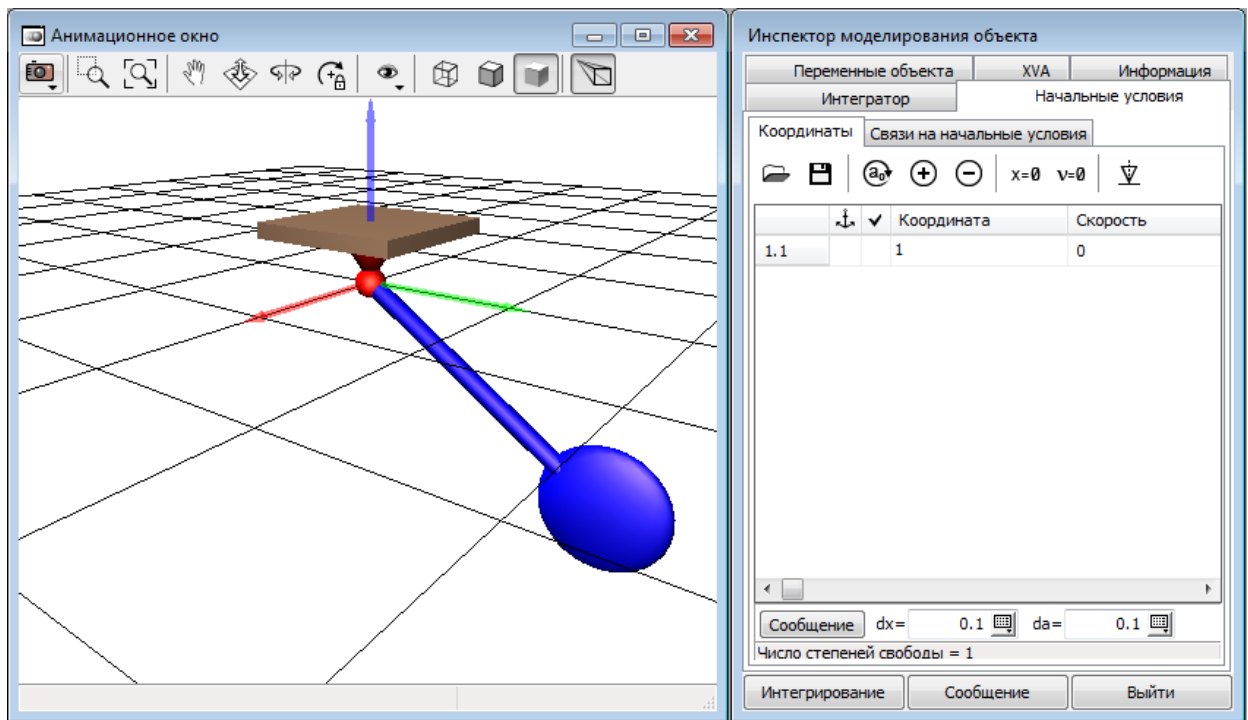


Рис. 1.16. Задание начальных условий движения маятника

Моделирование движения маятника

После того, как мы отклонили маятник, все готово к моделированию. Как правило, расчет выполняется очень быстро, поэтому для реалистичности отображения колебаний маятника в анимационном окне рекомендуется включить флажок **Замедление до реального масштаба времени**, см. рис. 1.15. Для начала просто запустим процесс моделирования на 10 секунд (установка по умолчанию).

5. Нажмите кнопку **Интегрирование** в окне **Инспектора моделирования объекта**.

В правом нижнем углу экрана появится окно отображения текущих параметров процесса интегрирования, рис. 1.17.

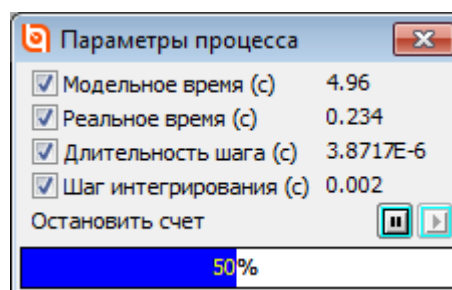


Рис. 1.17. Параметры процесса интегрирования

После окончания появится окно **Инспектора режима паузы процесса моделирования**, рис. 1.18. В нем вы можете увеличить время моделирования, изменить параметры численного метода.

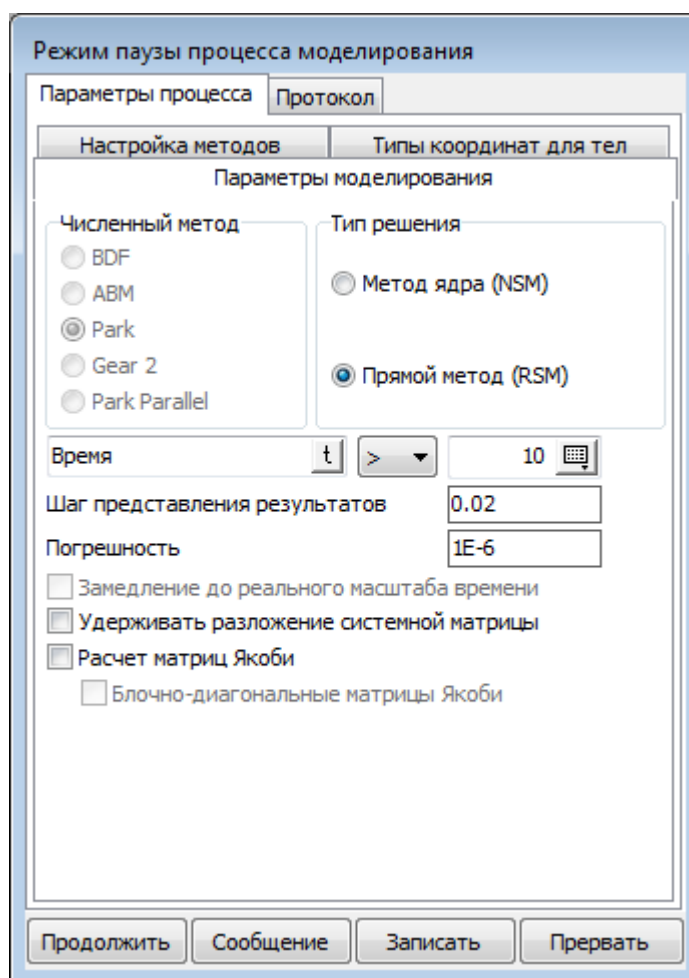


Рис. 1.18. Окно **Инспектора режима паузы процесса моделирования**

6. Нажмите кнопку **Прервать**. Появится окно **Инспектора моделирования объекта**.

Построение графиков

В процессе моделирования вы можете строить графики различных величин. Для этого сначала откроем новое графическое окно, затем в мастере переменных создадим новую переменную – проекцию центра масс маятника на ось Y. Перетащим мышкой созданную переменную из мастера переменных в графическое окно. После этого в процессе моделирования график переменной будет строиться в графическом окне.

Итак, создадим новое графическое окно.

7. Выберите пункт меню **Инструменты | Графическое окно...**
Далее откройте окно **Мастера переменных**.
8. Выберите пункт меню **Инструменты | Мастер переменных...**

Мастер переменных – специальный инструмент для создания переменных, которые затем можно построить в графическом окне, отображать в анимационном окне (если это вектор), сохранить в списке переменных, см. рис. 1.19.

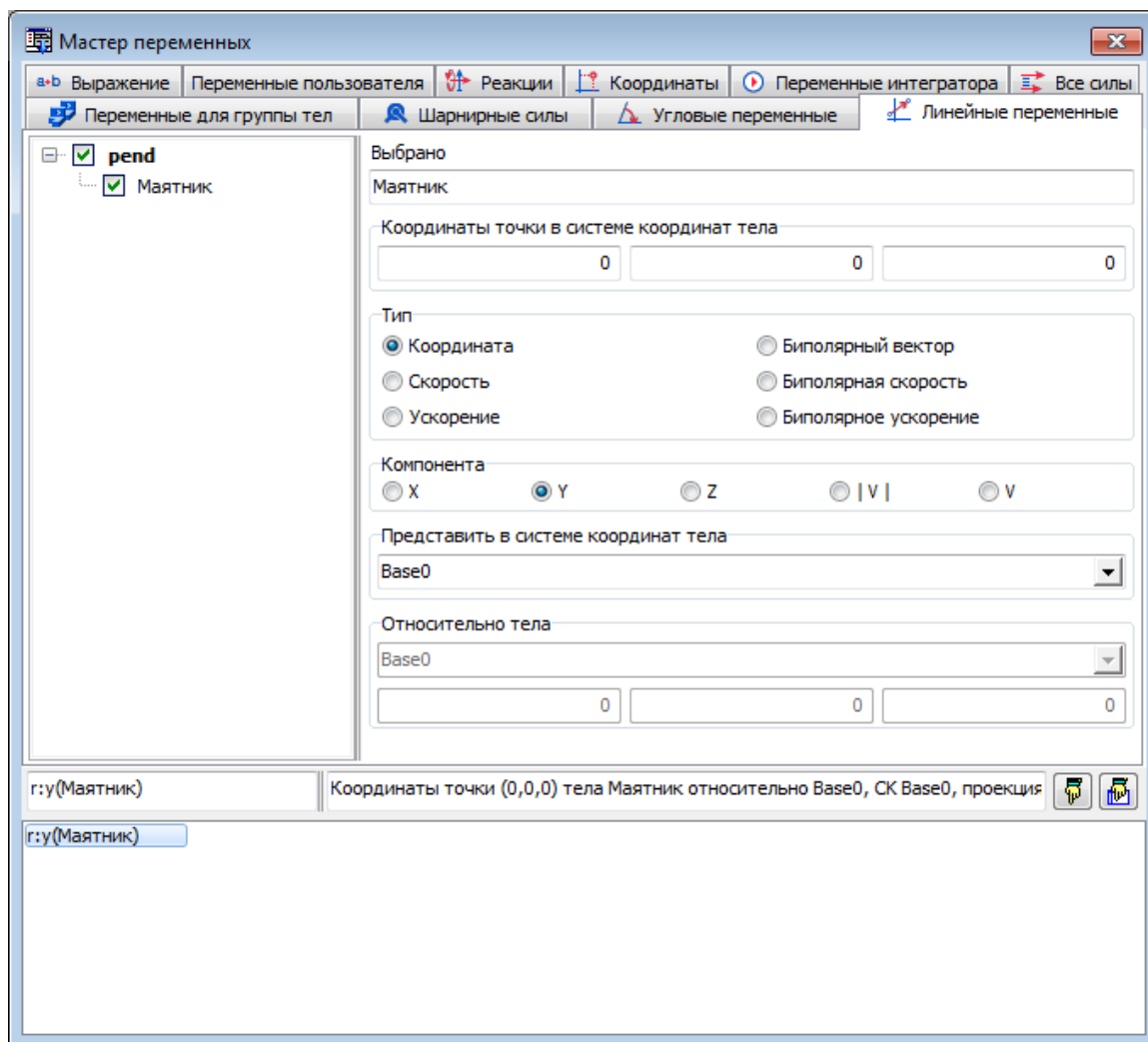



Рис. 1.19. Окно Мастера переменных

Давайте построим график перемещения центра масс маятника в проекции на ось Y .

9. Перейдите на вкладку **Линейные переменные**
10. В левой части окна **Мастера переменных** на дереве элементов объекта выберите элемент **Маятник**.
11. В разделе **Компоненты** выберите **Y**.
12. Поместите описанную переменную в контейнер, нажав кнопку . В контейнере переменных в нижней части **Мастера переменных** появится переменная **r:y(Маятник)**.
13. Выделите эту переменную и мышкой перетащите ее в графическое окно.
14. Перейдите к **Инспектору моделирования** объекта и нажмите кнопку **Интегрирование**.

В графическом окне построится график переменной, см. рис. 1.20.

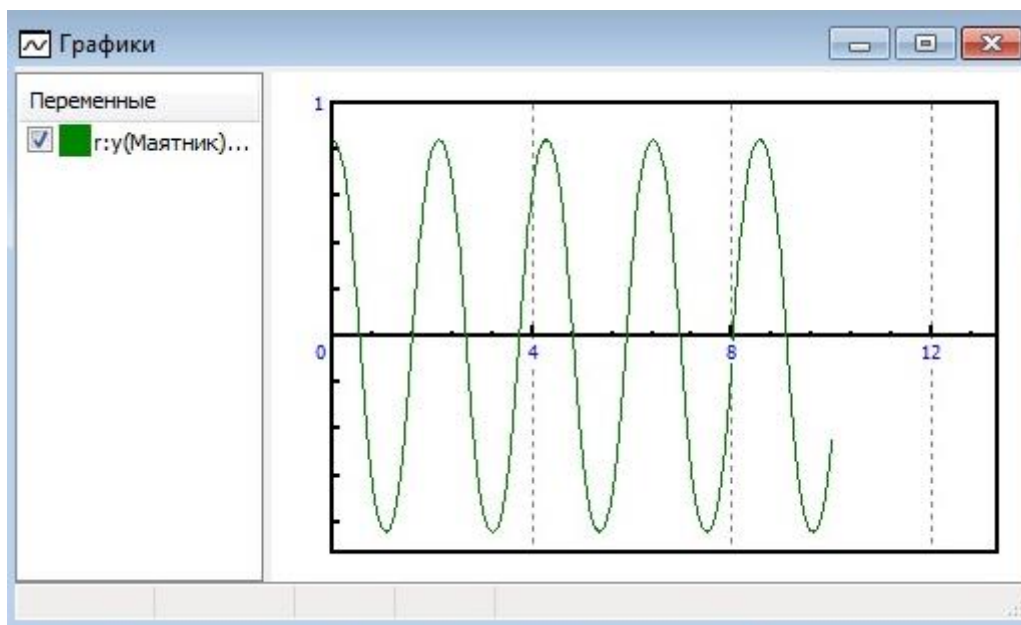



Рис. 1.20. Построение графика переменной в графическом окне

Построение векторов и траекторий

В процессе моделирования вы можете строить векторы различных величин в анимационном окне. Для анимации вектора скорости центра масс маятника сначала надо создать для него переменную в **мастере переменных**.

15. Перейдите в окно мастера переменных и выберите вкладку **Линейные переменные**.
16. В разделе **Тип** выберите **Скорость**.
17. В разделе **Компонента** укажите **V** (вектор).
18. Поместите описанную переменную в контейнер, нажав кнопку .
19. Выделите новую переменную в контейнере и мышкой перетащите ее в анимационное окно.

По умолчанию список переменных в анимационном окне не показывается. Для управления его положением используйте пункт **Положение списка векторов** контекстного меню в анимационном окне.

20. Вызовите контекстное меню анимационного окна и выберите пункт меню **Положение списка векторов | Снизу**.

Кроме вектора скорости построим также траекторию маятника в анимационном окне.

21. Повторите действия по созданию вектора скорости, только в разделе **Тип** укажите **Координата**. Перетащите переменную в анимационное окно.
22. Запустите интегрирование.

На этот раз в анимационном окне вы дополнительно видите вектор скорости и траекторию, см. рис. 1.21. Для изменения масштаба вектора скорости в анимационном окне используйте пункт контекстного меню **Настройки векторов...** Двойной щелчок мыши на элементе списка векторов (или на образе вектора в режиме паузы) позволит вам изменить цвет вектора и траектории, а для траектории – также изменить число точек ("длину" траектории).

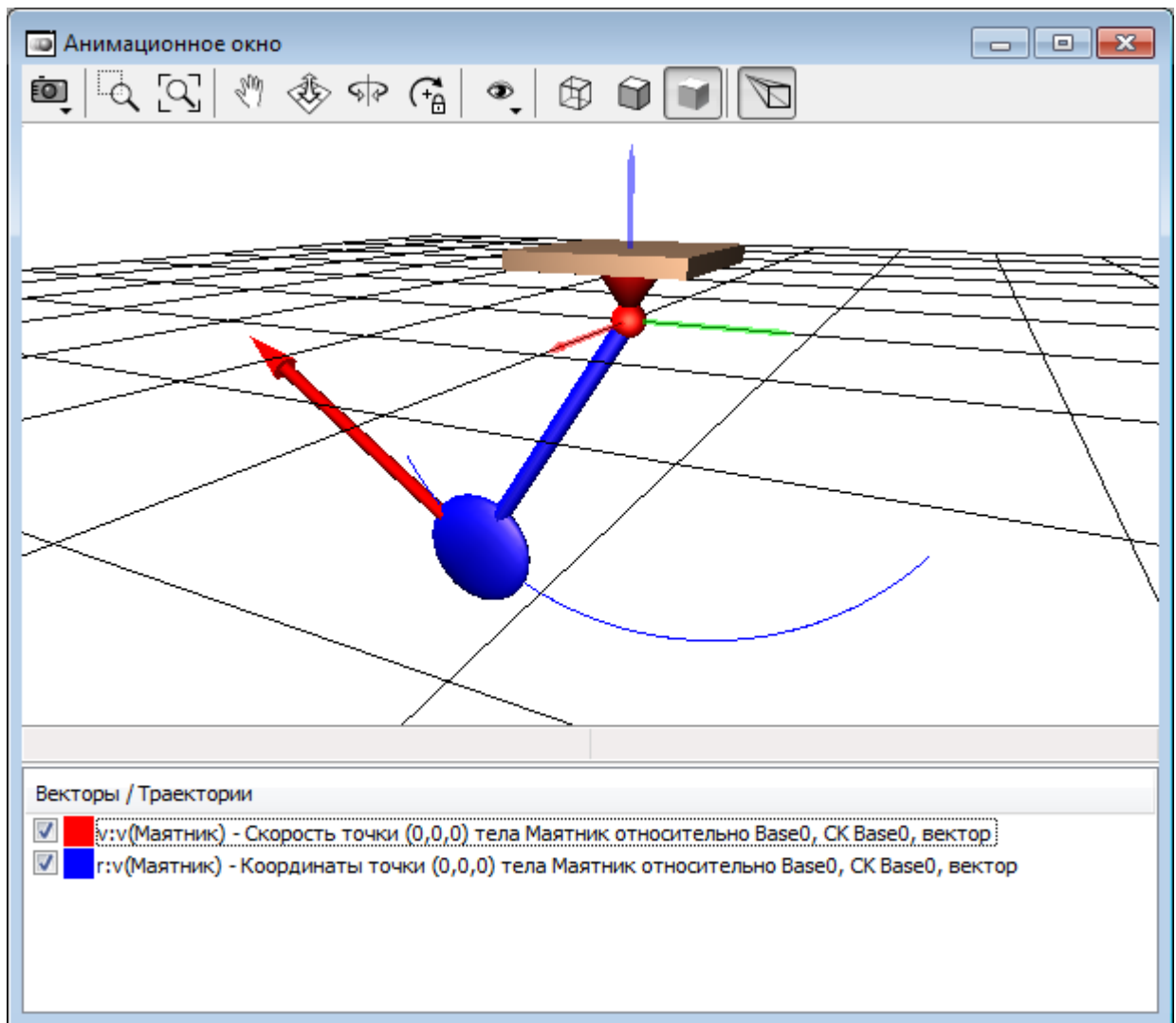


Рис. 1.21. Анимация вектора скорости и траектории маятника

2. Груз на пружине

2.1. Что мы изучим

В этом уроке мы научимся добавлять силы, задавать движение тел как функцию времени, познакомимся с понятием параметризации модели. Изучим применение *линейного анализа* для нахождения положения равновесия, частот и форм колебаний. А также изучим спектральный состав выходного сигнала с помощью окна *Статистика*.

2.2. Описание модели

В этом уроке мы рассмотрим пример моделирования прямолинейных свободных и вынужденных колебаний тела с учетом демпфирования. В конце данного урока мы создадим модель, представленную на рис. 2.1. Модель включает два твердых тела *Подвес* и *Груз*, два поступательных шарнира и упруго-диссипативную силу между телами.

Готовую модель вы можете найти в каталоге

[{Данные УМ}\SAMPLES\TUTORIAL\oscillator](#)

или скачать по адресу:

www.universalmechanism.com/download/90/rus/oscillator.zip

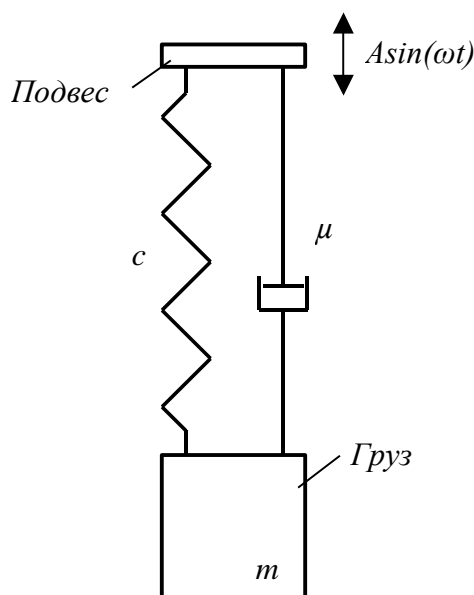


Рис. 2.1. Расчетная схема

2.3. Создание модели

2.3.1. Запуск UM Input и создание нового объекта моделирования

Для запуска программы описания моделей **UM Input**:

1. Выберите кнопку **Пуск**.
2. Выберите пункт **Программы** (пункт **Все программы** в Windows 7).
3. Выберите пункт **Универсальный механизм 9 | UM Input**.

Для создания новой модели:

4. Выберите пункт меню **Файл | Новый объект**.

2.3.2. Создание графических образов

Подвес

В качестве точки подвеса пружины и демпфера создадим тонкий прямоугольник.

1. Создайте новый графический объект.
2. Назначьте ему имя – **Подвес**.
3. В графический объект добавьте новый графический элемент – **Параллелепипед**.
4. Назначьте параметры **Параллелепипеда**, как показано на рис. 2.2.
5. Перейдите на вкладку **Цвета** и назначьте **синий** в качестве **диффузного и отраженного** цветов.

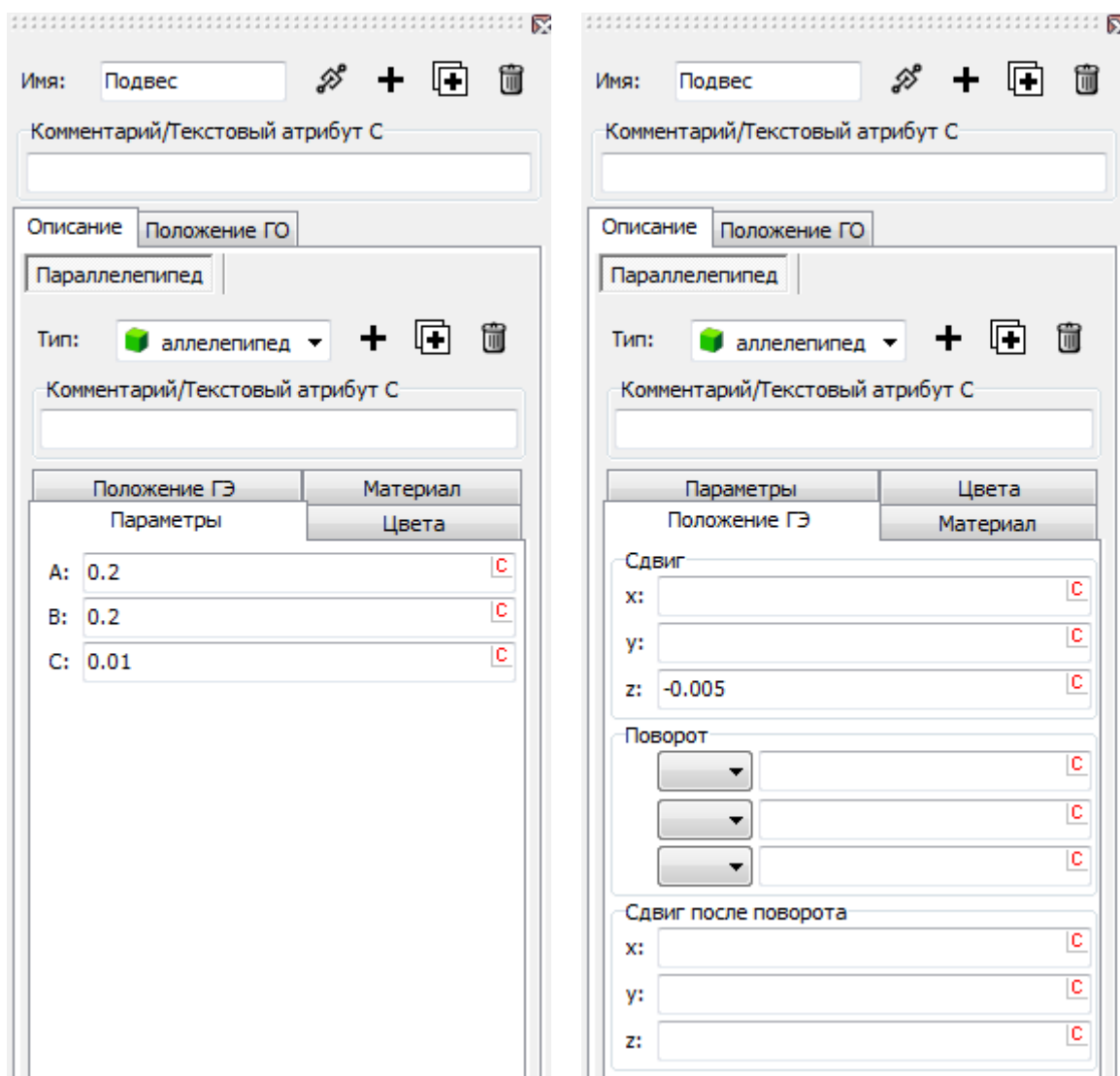


Рис. 2.2. Создание графического образа **Подвес**

Груз

Груз на пружине изобразим как куб со стороной **0.2 м**.

1. Создайте новый графический объект.
2. Назначьте ему имя – **Груз**.
3. В графический объект добавьте новый графический элемент – **Параллелепипед**.
4. Назначьте параметры **Параллелепипеда**, как показано на рис. 2.3.
5. Перейдите на вкладку **Цвета** и назначьте **красный** в качестве **диффузного** и **отраженного** цветов.

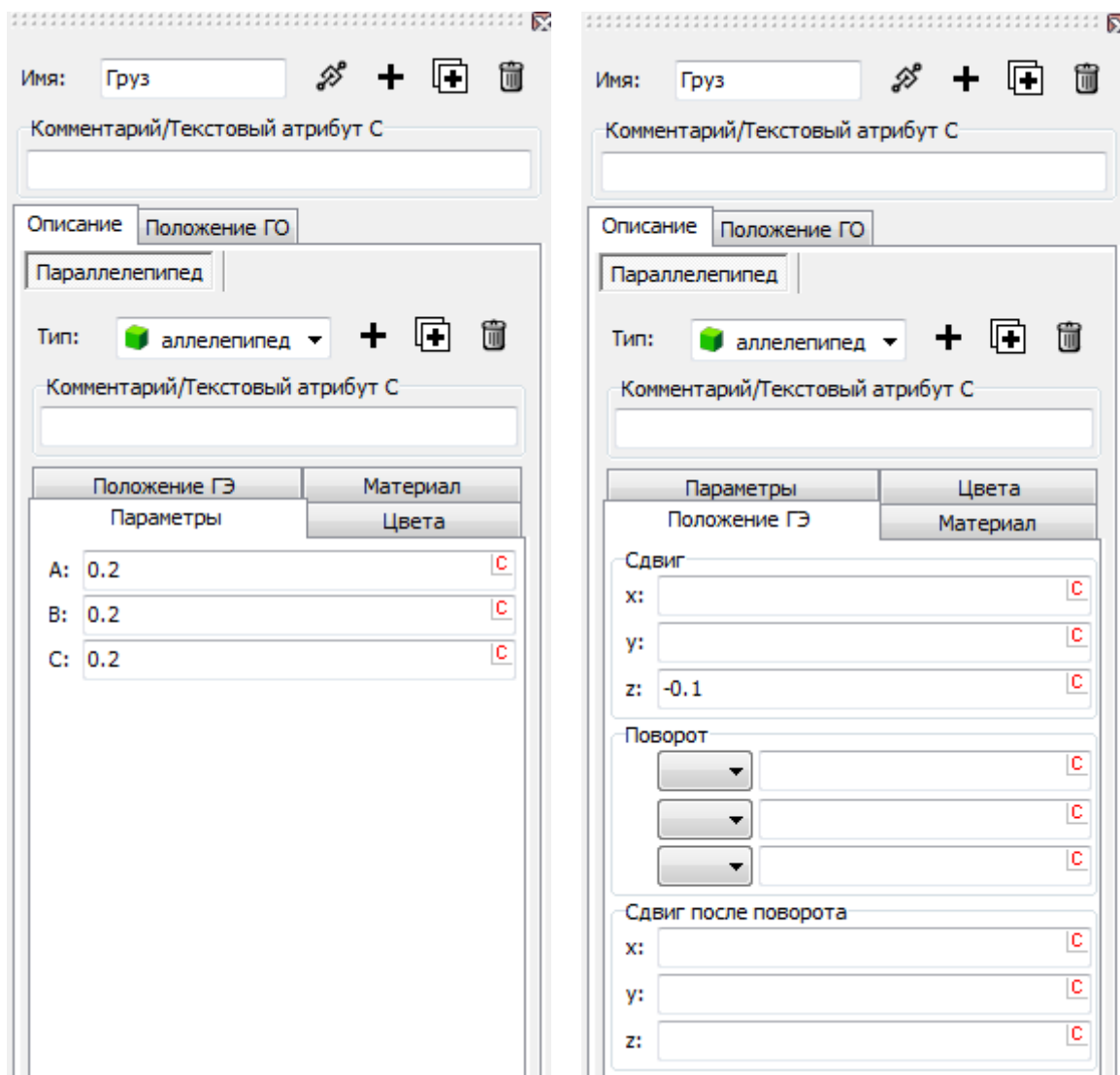


Рис. 2.3. Создание графического образа **Груз**

Пружина

Создадим графический образ пружины.

1. Создайте новый графический объект.
2. Назначьте ему имя – **Пружина**.
3. В графический объект добавьте новый графический элемент – **Пружина**.
4. Назначьте параметры **Пружины**, как показано на рис. 2.4.
5. Перейдите на вкладку **Цвета** и назначьте **желтый** в качестве **диффузного** и **красный** в качестве **отраженного** цветов.

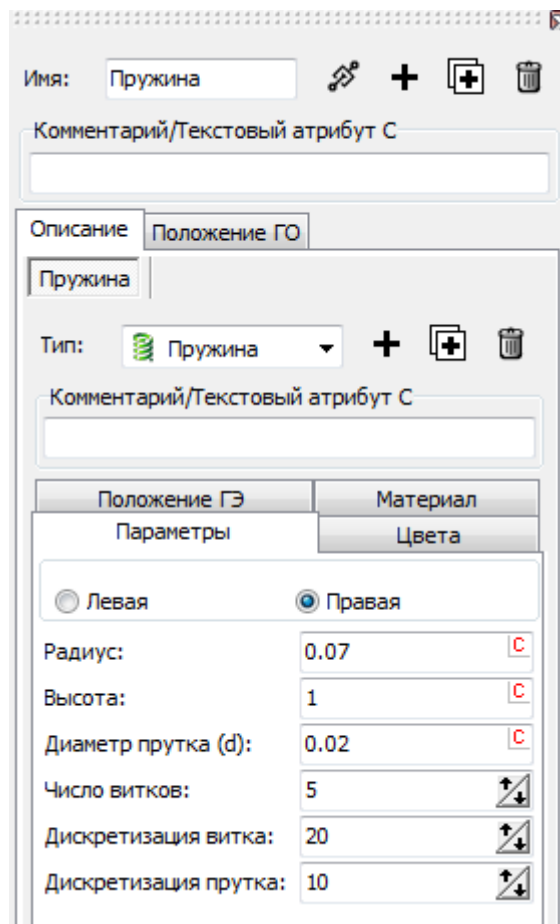


Рис. 2.4. Создание графического образа **Пружина**

Демпфер

Создадим графический образ демпфера, рис. 2.5.

1. Создайте новый графический объект.
2. Назначьте ему имя – **Демпфер**.
3. В графический объект добавьте новый графический элемент – **Конус**.
4. Назначьте **Конусу** следующие параметры:
 $R2 = 0.02;$
 $R1 = 0.02;$
 $h = 1.$
5. Выберите **синий** цвет в качестве **диффузного**.
6. Добавьте еще один **Конус** с параметрами:
 $R2 = 0.04;$
 $R1 = 0.04;$
 $h = 0.5.$
7. На вкладке **Положение ГЭ** в поле **Сдвиг | z** установите **0.25**. Установите для графического элемента **красный диффузный** цвет.

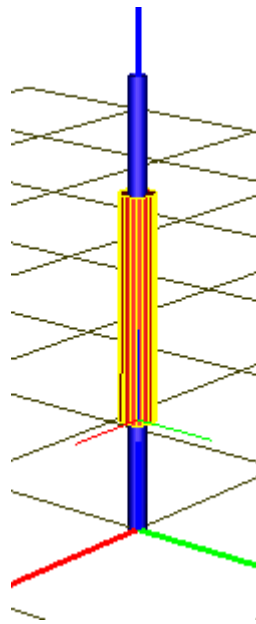


Рис. 2.5. Создание графического образа **Демпфер**

2.3.3. Создание тел

Подвес

Создадим новое твердое тело – подвес.

1. Добавьте новое твердое тело.
2. Переименуйте его в **Подвес**.
3. Выберите графический образ для тела. В списке **Графический образ** выберите **Подвес**, см. рис. 2.6.

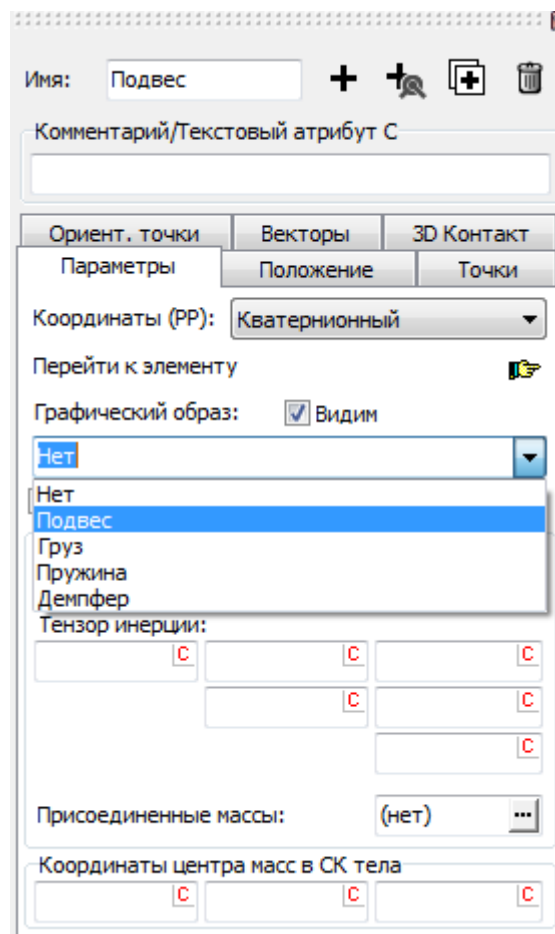


Рис. 2.6. Создание тела **Подвес**

Груз

Создадим новое твердое тело – груз. Массу груза вместо численного значения зададим параметром (идентификатором) m . Параметризация модели позволяет исследовать динамику систем при различных значениях параметров, не синтезируя уравнения движения заново каждый раз.

1. Добавьте новое твердое тело.
2. Переименуйте его в **Груз**.
3. Выберите графический образ для тела. В списке **Графический образ** выберите **Груз**.
4. В поле **Масса** введите m и нажмите **Enter**. Появится диалоговое окно **Инициализация численных значений**.
5. В поле **Значение** введите **10**. Нажмите **Enter**.
6. В списке параметров модели, слева в окне конструктора, появится первый параметр модели – m , см. рис. 2.7.

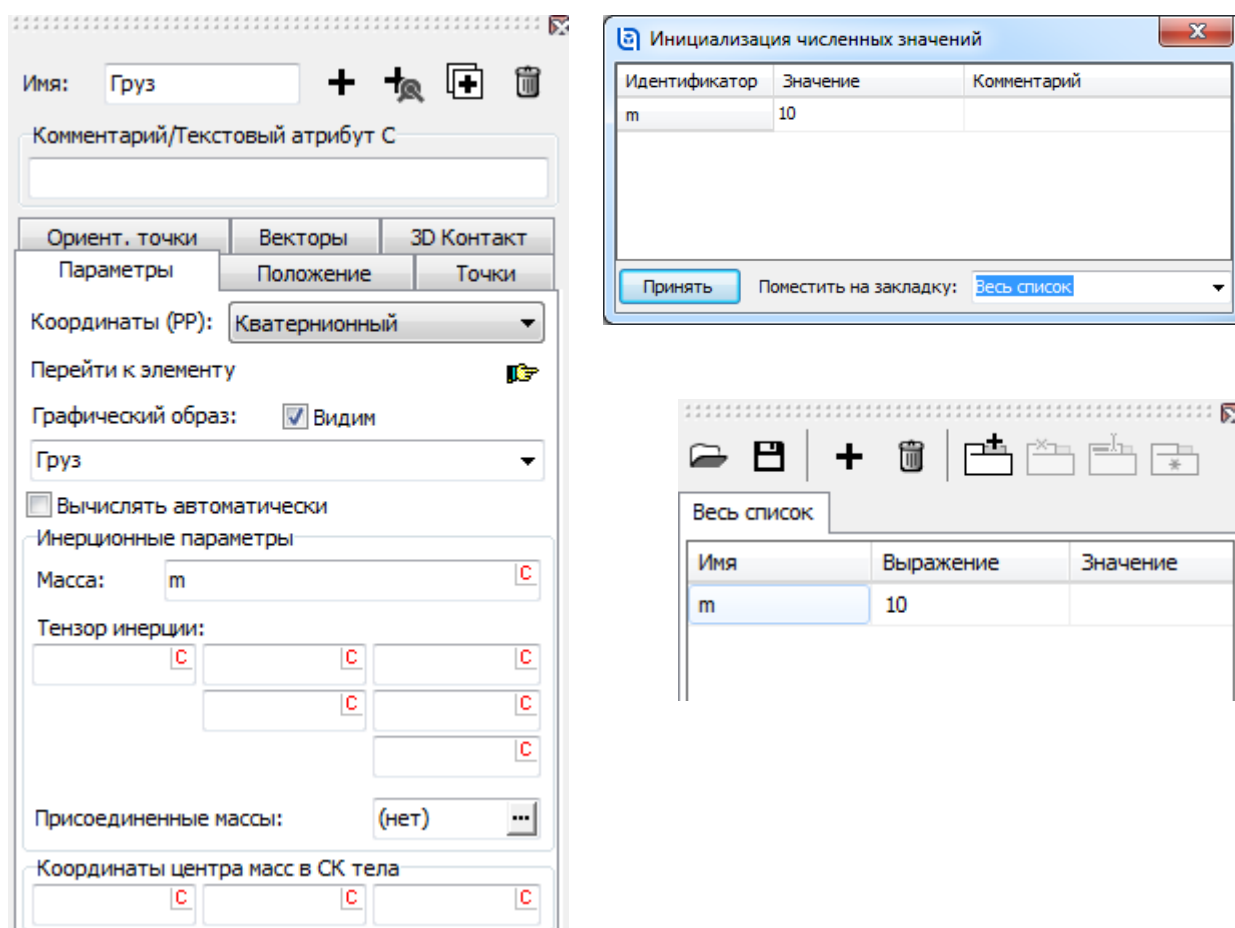



Рис. 2.7. Создание тела **Груз**

2.3.4. Создание шарниров

Шарнир для подвеса

В нашей задаче подвес совершает гармонические колебания по вертикали с амплитудой A . Сейчас мы добавим в модель поступательный шарнир между базой и подвесом, а координату зададим функцией времени.

1. Выберите тело **Подвес**.
2. Нажмите кнопку  и выберите пункт **Создать шарнир**.
3. В появившемся списке типов шарниров выберите **Поступательный**, см. рис. 2.8, слева. Будет создан новый шарнир указанного типа.
4. Установите параметры шарнира, как показано на рис. 2.8, справа.

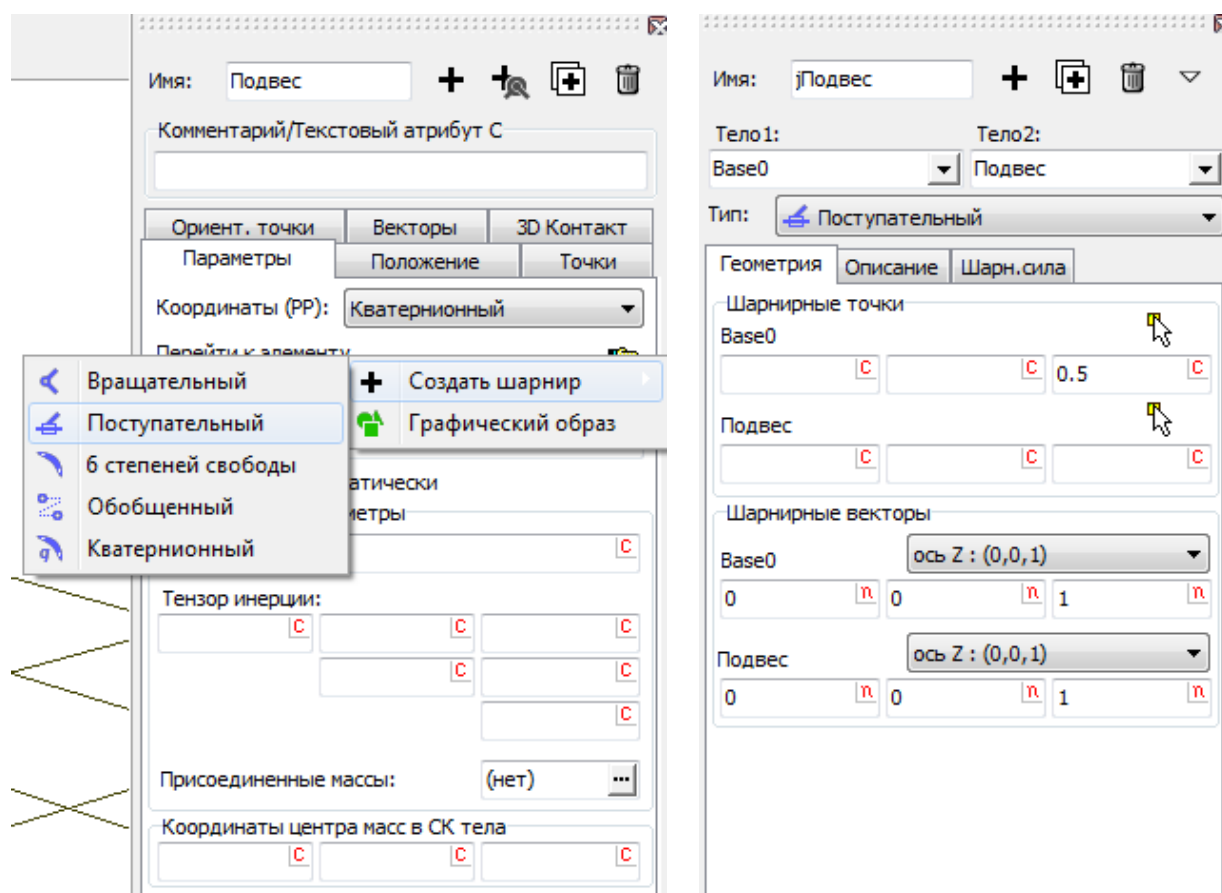


Рис. 2.8. Добавление поступательного шарнира

5. Перейдите на вкладку **Описание**.
6. Включите флажок **Заданная функция времени**.
7. В поле **Тип задания функции** выберите **Выражение** и в качестве выражения введите $a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, см. рис. 2.9.

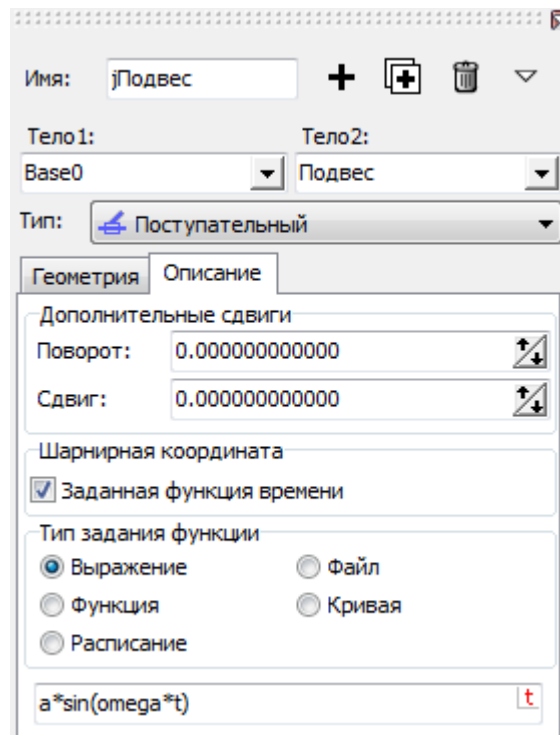


Рис. 2.9. Координата в шарнире как функция времени

8. В появившемся окне инициализации численных значений введите $a = 0.05$ и $\omega = 10$, рис. 2.10.

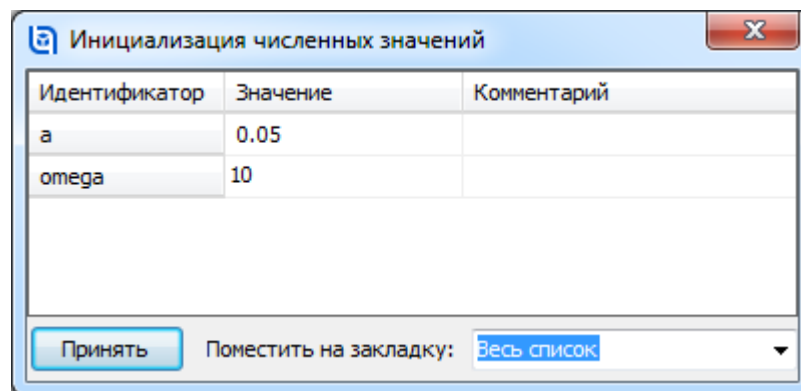

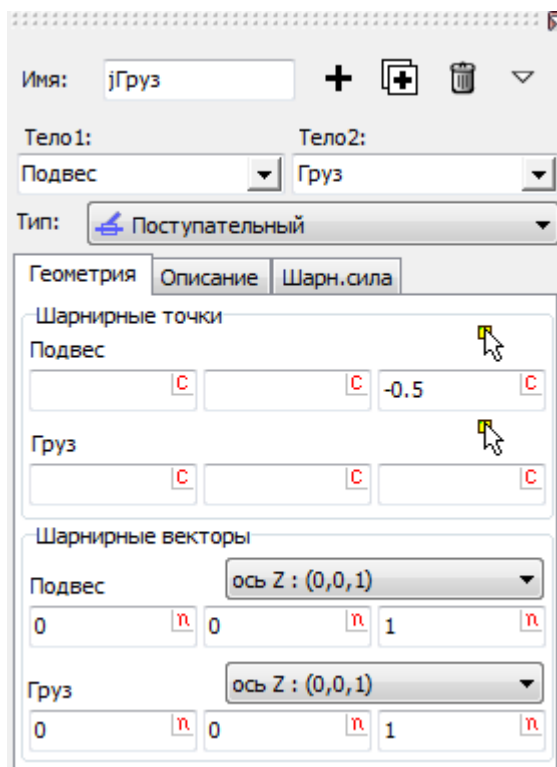


Рис. 2.10. Окно инициализации численных значений

Шарнир для груза

1. Выберите тело **Груз**.
2. Нажмите кнопку  и выберите пункт **Создать шарнир**.
3. В появившемся списке типов шарниров выберите **Поступательный**.
4. В качестве первого тела для шарнира выберите **Подвес** вместо **Base0**.
5. Остальные параметры шарнира установите, как показано на рис. 2.11.



Имя: jГруз

Тело1: Подвес Тело2: Груз

Тип: Поступательный

Геометрия Описание Шарн. сила

Шарнирные точки

Подвес

<input type="text"/>	<input type="text"/>	-0.5	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	------	----------------------

Груз

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Шарнирные векторы

Подвес

ось Z : (0,0,1)

0	<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>
---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------

Груз

ось Z : (0,0,1)

0	<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>
---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------

Рис. 2.11. Параметры шарнира для **Груза**

2.3.5. Описание сил

Введем упруго-диссипативную силу, действующую между подвесом и грузом. Жесткость пружины обозначим как c , коэффициент диссипации как μ . Длину нерастянутой пружины обозначим Length .

1. Выберите шарнир **jГруз**.
2. Перейдите на вкладку **Шарн. сила** (Шарнирная сила).
3. В поле **Шарнирная сила** выберите **Линейный**, рис. 2.12.
4. В поле **Коэф. жесткости (c)** введите c , в поле **Координата (x0)** введите Length , а в поле **Коэф. диссипации (d)** введите μ . При инициализации численных значений введите $c = 250$, $\text{Length} = 0.4$, $\mu = 5$.

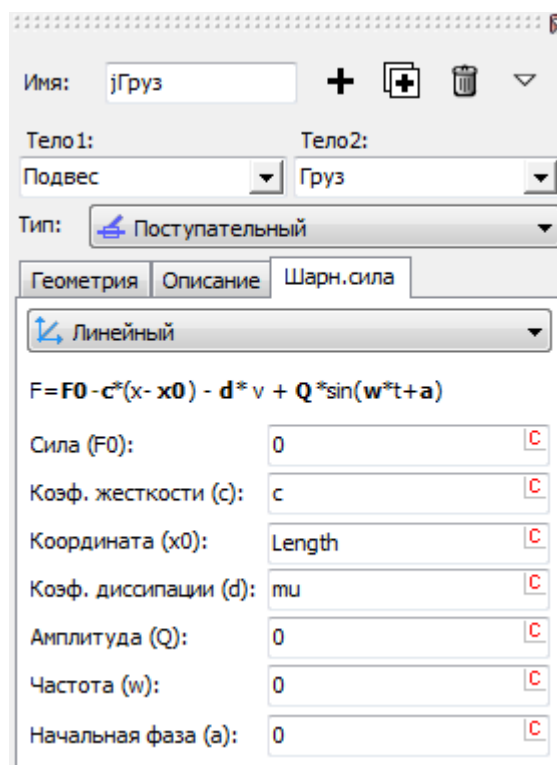


Рис. 2.12. Упруго-диссипативная шарнирная сила

2.3.6. Визуализация пружины и демпфера

Сейчас наш объект полностью описан с точки зрения механики. Однако внешний вид модели оставляет желать лучшего – пружина и демпфер не видны, см. рис. 2.13, слева. Чтобы визуализировать пружину и демпфер, мы введем в модель биполярные силы, которым назначим графический образ демпфера и пружины. Значения же сил положим равными нулю. Введенные таким образом силы никак не отразятся на динамике системы, однако позволят нам визуализировать пружину и демпфер, см. рис. 2.13, справа.

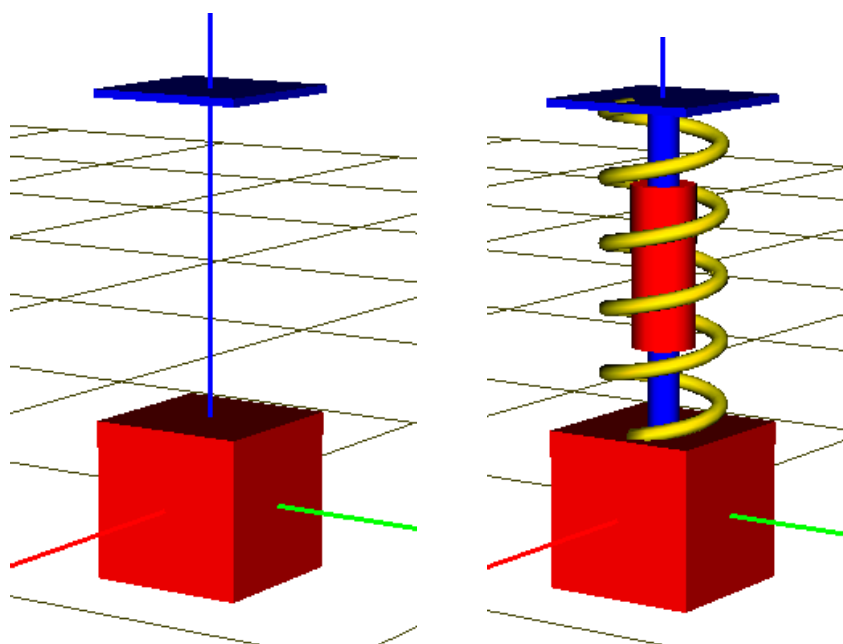


Рис. 2.13. Визуализация сил

Замечание. Упругую и диссипативную силы, описанные как биполярные, можно было бы описать непосредственно как одну шарнирную силу. Это было бы удобно, т.к. рассматриваемый нами идеальный случай² позволяет смоделировать ситуацию, в которой длина пружины и демпфера будет равна нулю (тело поднимется на такую высоту, что точки прикрепления силовых элементов окажутся на одном уровне). В этом случае происходит вырождение биполярных элементов – при нулевой длине биполярной силы невозможно определить ее направление. Шарнирные силы не имеют такого вырождения. Именно поэтому мы и использовали их для моделирования данной механической системы.

² Силовая характеристика реальной пружины – нелинейная. При смыкании витков пружины ее жесткость резко возрастает.

1. Итак, перейдите на элемент **Биполярные силы** в списке элементов модели.
2. Добавьте две биполярные силы. Параметры сил укажите в соответствии с рис. 2.14.

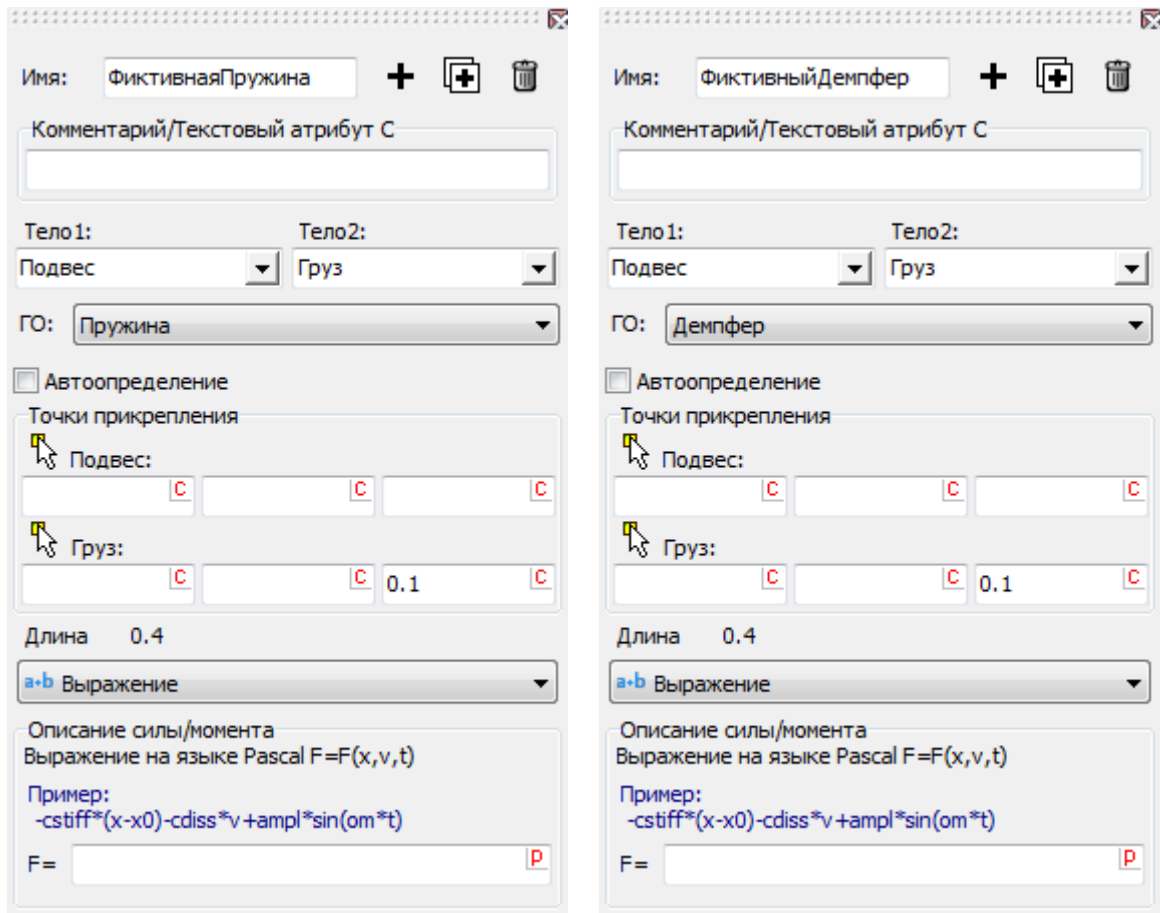


Рис. 2.14. Фиктивные биполярные силы

2.3.7. Дополнительные параметры

Возможности параметризации в УМ позволяют выразить одни параметры модели через другие. Покажем это на примере нашей модели. Введем в модель два новых параметра – определим точные значения собственной частоты колебаний груза и величину критического коэффициента демпфирования³.

Собственную частоту колебаний груза определим по следующей формуле:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

где k – собственная частота колебаний, рад/с;

c – коэффициент жесткости пружины, Н/м;


m – масса груза, кг.

Величина критического коэффициента демпфирования определяется следующим образом:

$$\mu^* = 2\sqrt{cm},$$

где μ^* – критическое значение коэффициента демпфирования, Н·с/м.

³ Существует такое значение коэффициента диссипации, называемое критическим, при котором движение груза уже больше не является периодическим и асимптотически стремится к равновесному положению.

- Итак, добавим два новых идентификатора (параметра) к модели. В списке идентификаторов нажмите кнопку  или выберите пункт **Новый идентификатор** в контекстном меню, рис. 2.15.

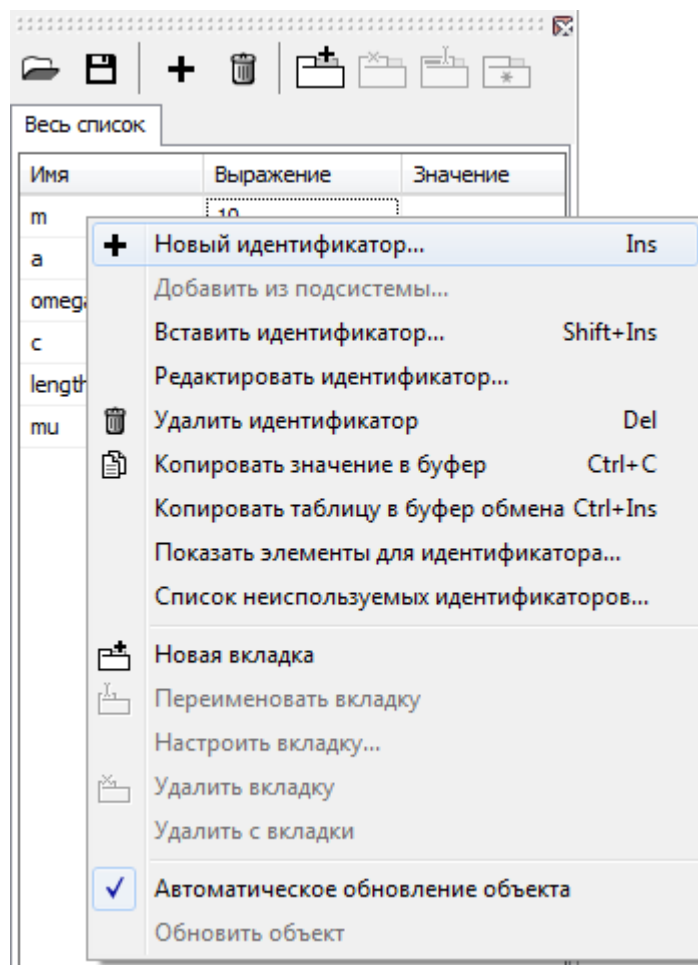


Рис. 2.15. Список идентификаторов

- В появившемся окне **Добавить идентификатор** введите данные, как показано на рис. 2.16 (sqrt – обозначение квадратного корня).

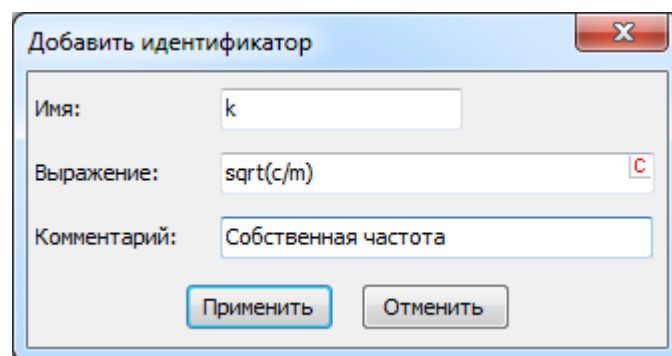


Рис. 2.16. Добавление идентификатора

- Добавьте еще один идентификатор $\mu_{star} = 2 * \sqrt{c * m}$ с комментарием «Критический коэффициент демпфирования».

2.3.8. Подготовка к моделированию

1. Сохраните модель с именем **Oscillator** (пункт меню **Файл | Сохранить как...**).

Переходим в программу моделирования динамики объектов.

2. Выберите пункт меню **Объект | Моделирование...**, или просто нажмите клавишу *Ctrl+M*.

Автоматически будет запущена программа моделирования **UM Simulation**, в которой откроется текущий объект.


2.4. Моделирование движения

Рассмотрим некоторые частные случаи колебаний: свободные затухающие колебания и вынужденные колебания без учета сил сопротивления.

2.4.1. Свободные колебания

Свободные колебания с учетом сил сопротивления

Откроем новое анимационное окно, а также графическое окно, в котором будем строить график вертикальной координаты груза.

1. Откройте новое анимационное окно (пункт меню **Инструменты | Анимационное окно**).
2. Откройте новое графическое окно (**Инструменты | Графическое окно**).
3. Откройте мастер переменных (**Инструменты | Мастер переменных**).
4. Перейдите на вкладку **Линейные переменные**, в списке тел выберите **Груз**, в поле **Тип** выберите **Координата**, в поле **Компонента** выберите **Z**. Кнопкой  поместите описанную переменную в контейнер переменных и перетащите созданную переменную в графическое окно. Закройте мастер переменных.
5. Выберите пункт меню **Анализ | Моделирование...** Появится **Инспектор моделирования объекта**.
6. Разместите окна на рабочем столе программы моделирования так, как вам кажется это удобным, например, как показано на рис. 2.17.

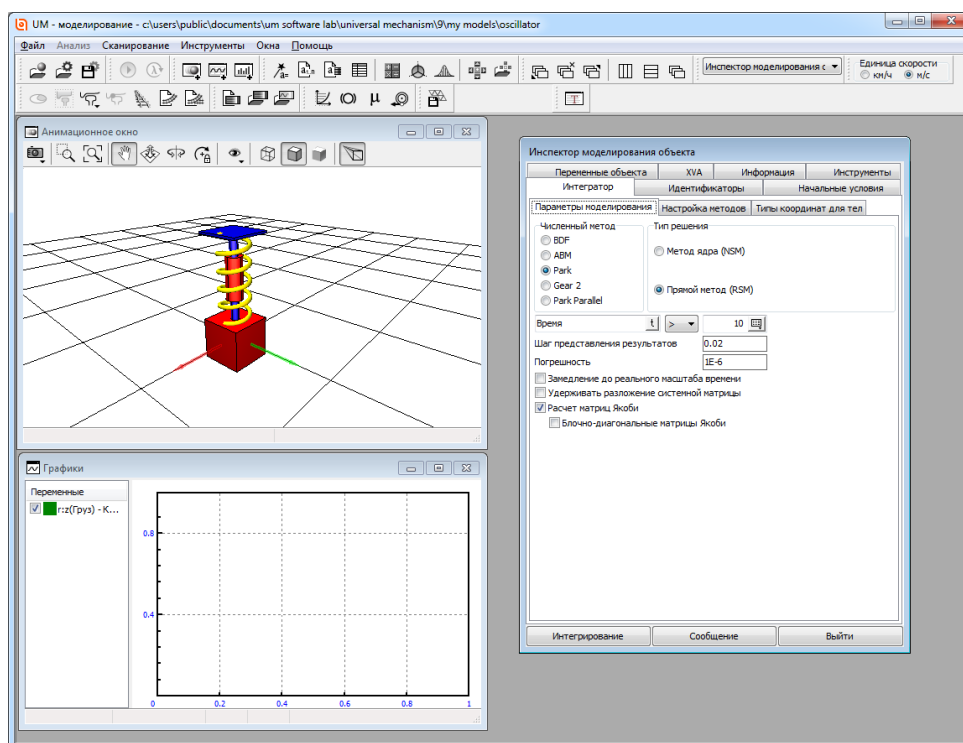


Рис. 2.17. Рабочий стол программы моделирования **UM Simulation**

7. Перейдите в **Инспектор моделирования объекта** и выберите вкладку **Идентификаторы**, см. рис. 2.18.
8. Значение параметра **a** установите равным нулю и нажмите клавишу **Enter**. Таким образом мы установим нулевую амплитуду колебаний подвеса, другими словами сделаем его неподвижным для исследования свободных колебаний.

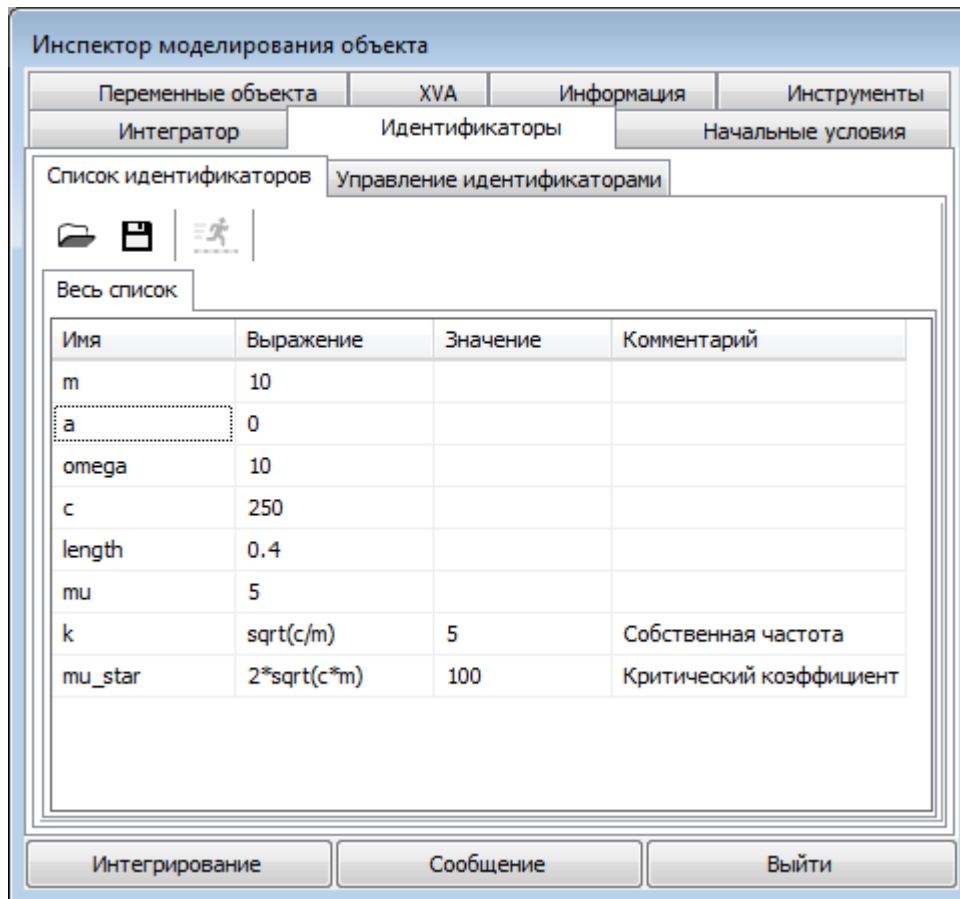


Рис. 2.18. Параметры модели

9. Перейдите на вкладку **Начальные условия**. В поле **Координата | 1.1** введите **0.1**, см. рис. 2.19. Дело в том, что положение системы при нулевых координатах довольно близко к положению равновесия и если не изменить начальные условия, то амплитуда колебаний будет невелика.
10. Вернитесь на вкладку **Интегратор**. В поле **Время моделирования** введите **25**.
11. Запустите расчет динамики системы кнопкой **Интегрирование**.

Запустится процесс численного решения уравнений динамики в течение 25 с. В анимационном окне будет показана динамика системы, а в графическом – построен график вертикальной координаты груза в зависимости от времени.

В графическом окне нажмите кнопку **100%** на выпадающей панели быстрого доступа или выберите пункт **Показать все** контекстного меню, см. рис. 2.20. График переменной впишется в размеры окна.

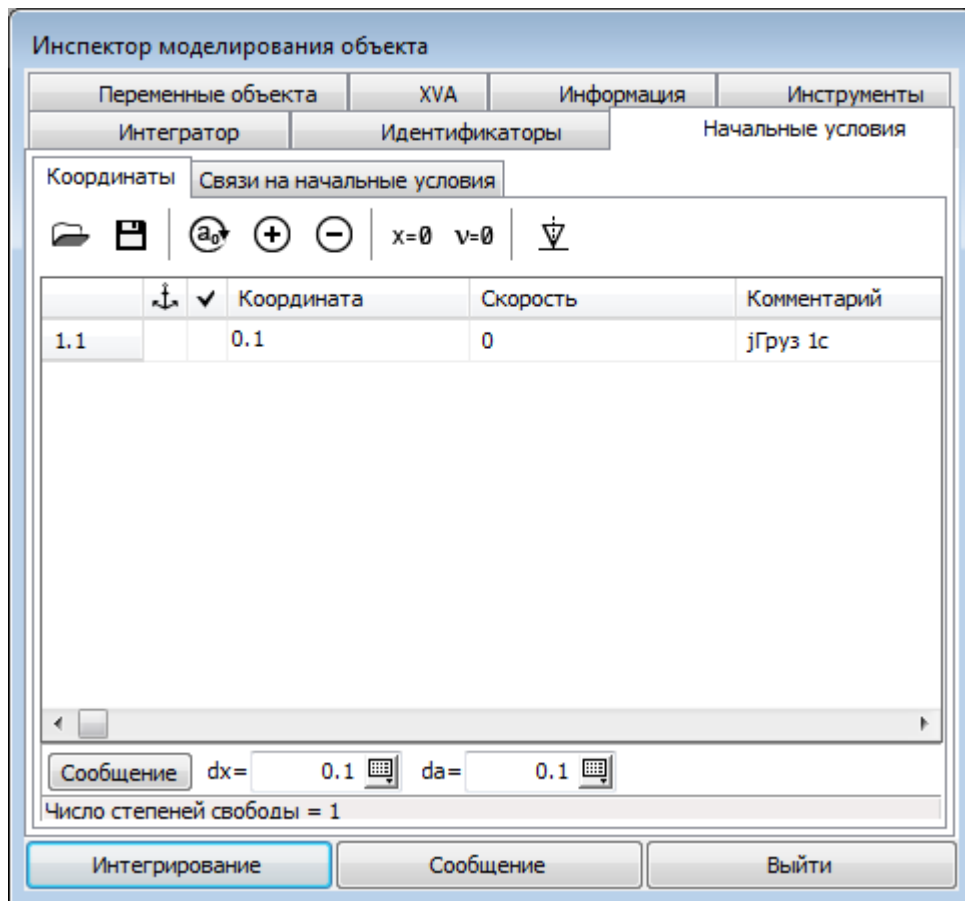


Рис. 2.19. Начальные условия

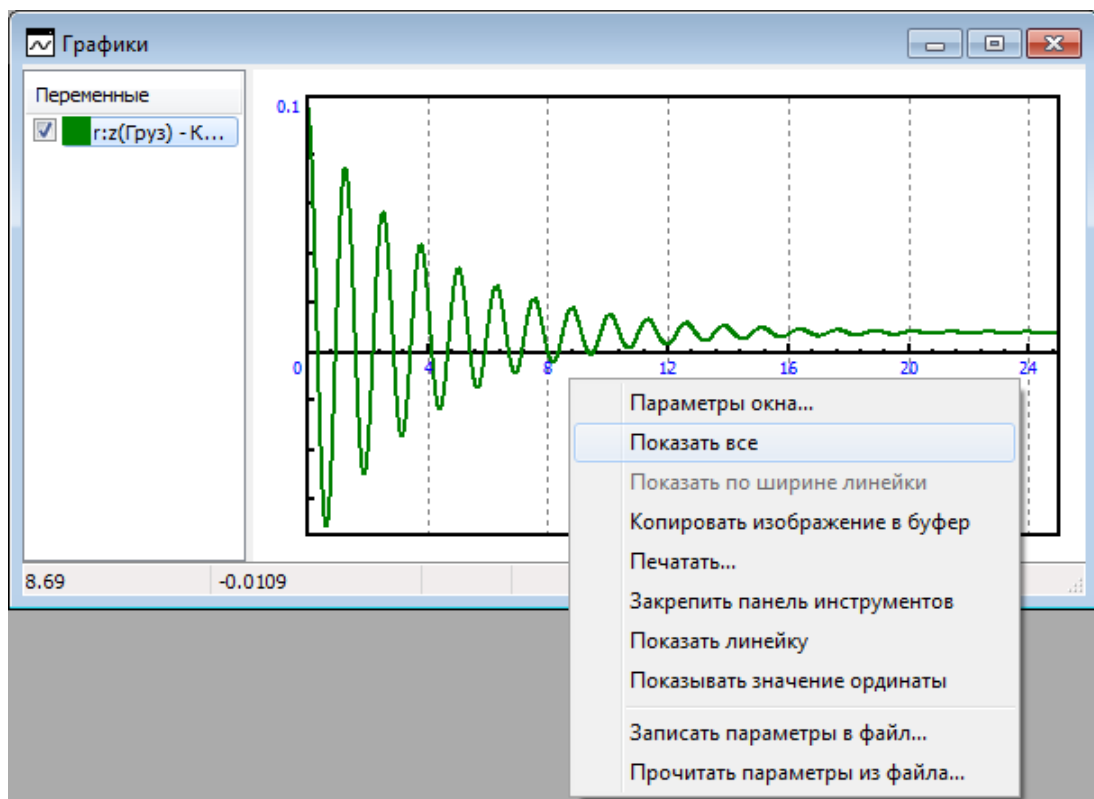


Рис. 2.20. Графическое окно после первого численного эксперимента

Свободные колебания без учета сил сопротивления

Сейчас мы отключим демпфирование и сравним графики перемещений груза. При нулевом коэффициенте диссипации мы должны получить график незатухающих колебаний.

1. Перейдите в графическое окно. Выделите переменную **r:z(Груз)** в списке переменных слева и нажмите правую кнопку мыши. Появится контекстное меню. Выберите пункт **Скопировать как статические**. Выделенная переменная будет скопирована.
2. Перейдите в окно **Инспектора режима паузы** и нажмите кнопку **Прервать**. Появится **Инспектор моделирования объекта**.

Замечание. Переменная **r:z(Груз)**, которую мы перетащили в графическое окно, будет пересчитываться для каждого численного эксперимента – так называемая *динамическая* переменная. Чтобы сравнить графики одной и той же величины для экспериментов с различными значениями параметров необходимо скопировать интересующую вас переменную как *статическую*.

3. В **Инспекторе моделирования объекта** перейдите на вкладку **Идентификаторы**.
4. Установите значение **$\mu = 0$** и нажмите **Enter**. Таким образом, мы установили нулевой коэффициент диссипации, то есть отключили демпфер.
5. Нажмите кнопку **Интегрирование**.

В течение нескольких секунд завершится моделирование свободных незатухающих колебаний. Графическое окно после двух численных экспериментов показано на рис. 2.21.

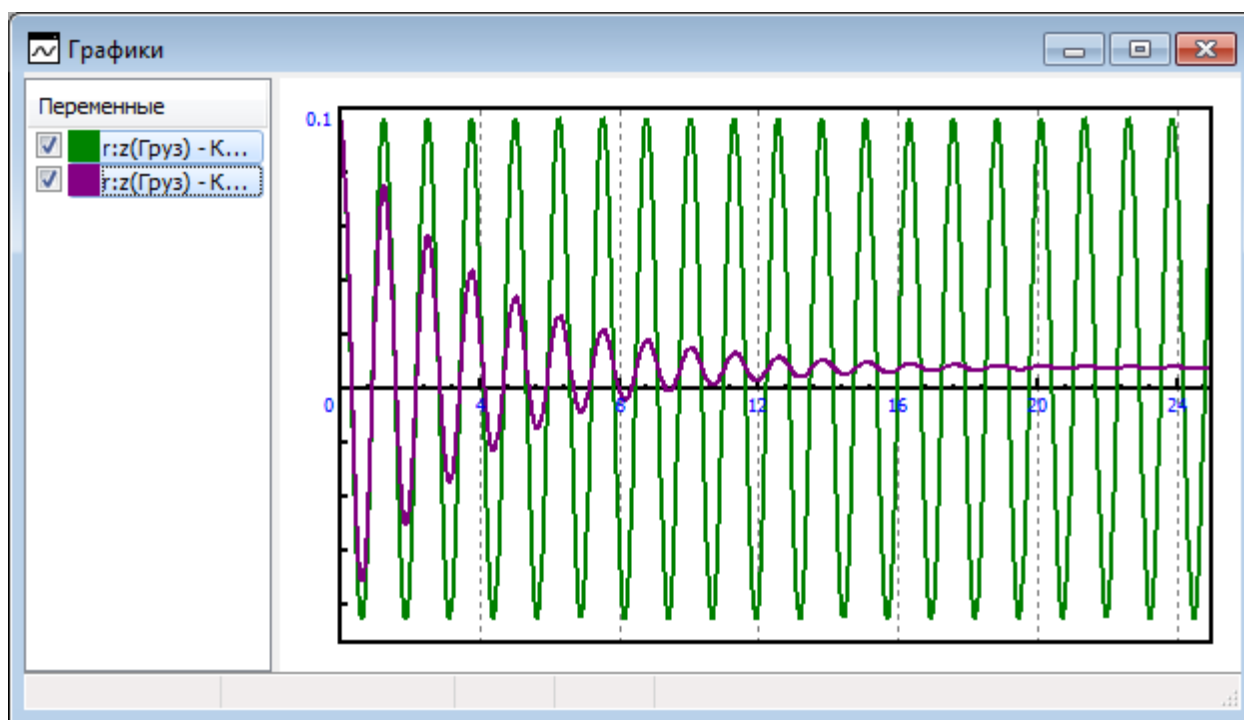


Рис. 2.21. Графическое окно после двух численных экспериментов

Свободные колебания: случай критического коэффициента диссипации

Как мы выяснили критическим значением коэффициента диссипации (идентификатор **mu_star**) является **mu = 100** Н·с/м. Проанализируем характер движения груза в этом случае.

1. Перейдите в графическое окно. Выделите первую переменную **r:z(Груз)** в списке переменных слева и выберите пункт контекстного меню **Скопировать как статические**.
2. Перейдите в окно **Инспектора режима паузы** и нажмите кнопку **Прервать**.
3. В появившемся **Инспекторе моделирования объекта** установите **mu = 100**.
4. Запустите моделирование.

Как мы и предполагали – движение груза при критической величине коэффициента диссипации носит аperiodический характер, см. рис. 2.22.

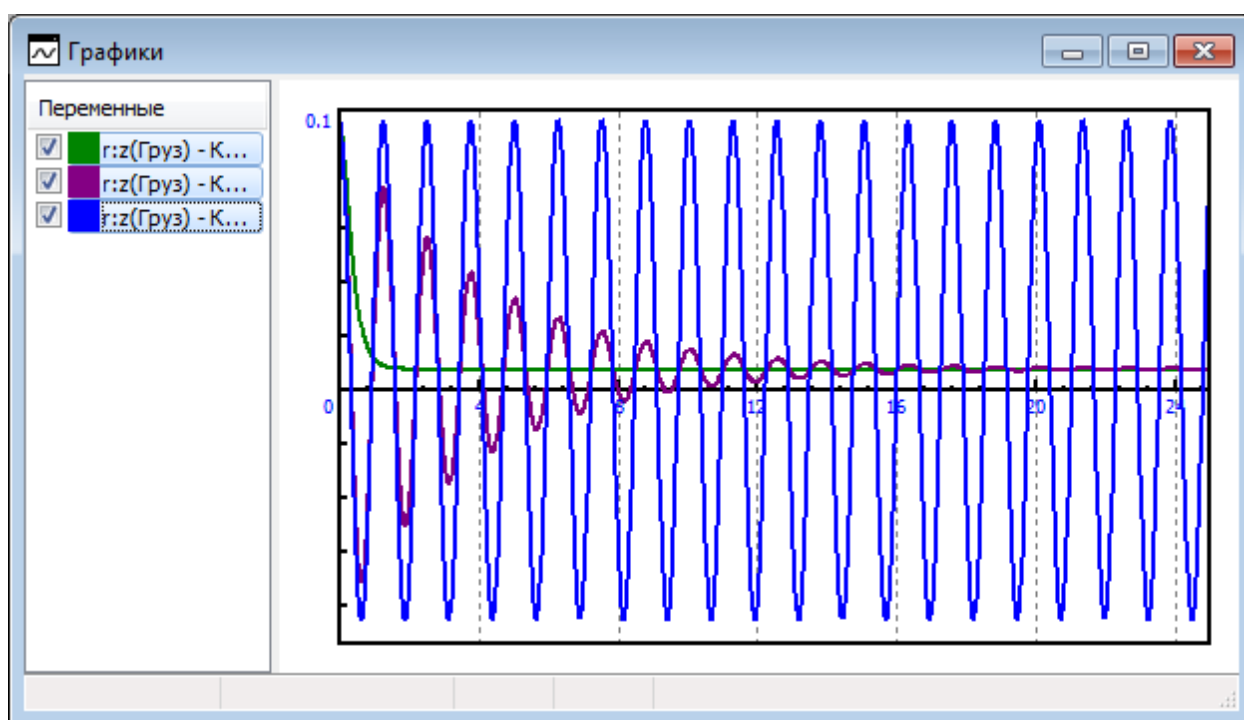


Рис. 2.22. Графическое окно после трех численных экспериментов

5. Проведите численные эксперименты для других коэффициентов диссипации. При этом не забывайте копировать переменные как статические.
6. Если вы меняли величину коэффициента диссипации, то установите ее обратно в значение **mu = 100** Нс/м.

2.4.2. Статистический анализ

Познакомимся с некоторыми дополнительными инструментами обработки результатов моделирования.

1. Откройте окно статистического анализа, пункт меню **Инструменты | Статистика...**. Появится окно статистической обработки результатов моделирования.
2. Перетащите переменную, соответствующую незатухающим колебаниям, из графического окна в окно статистики.
3. Перейдите в окно статистики и выберите вкладку **Спектральная плотность мощности**.

Как видно из графика спектральной плотности мощности процесса в решении присутствует только одна частота, см. рис. 2.23. Определим эту частоту по графику – приблизительно 0,78 Гц (см. значение абсциссы в левом нижнем углу окна, рис. 2.24, что составляет $0,78 \cdot 2\pi = 4,9$ рад/с. Точное значение собственной круговой частоты составляет 5 рад/с (идентификатор **k**).

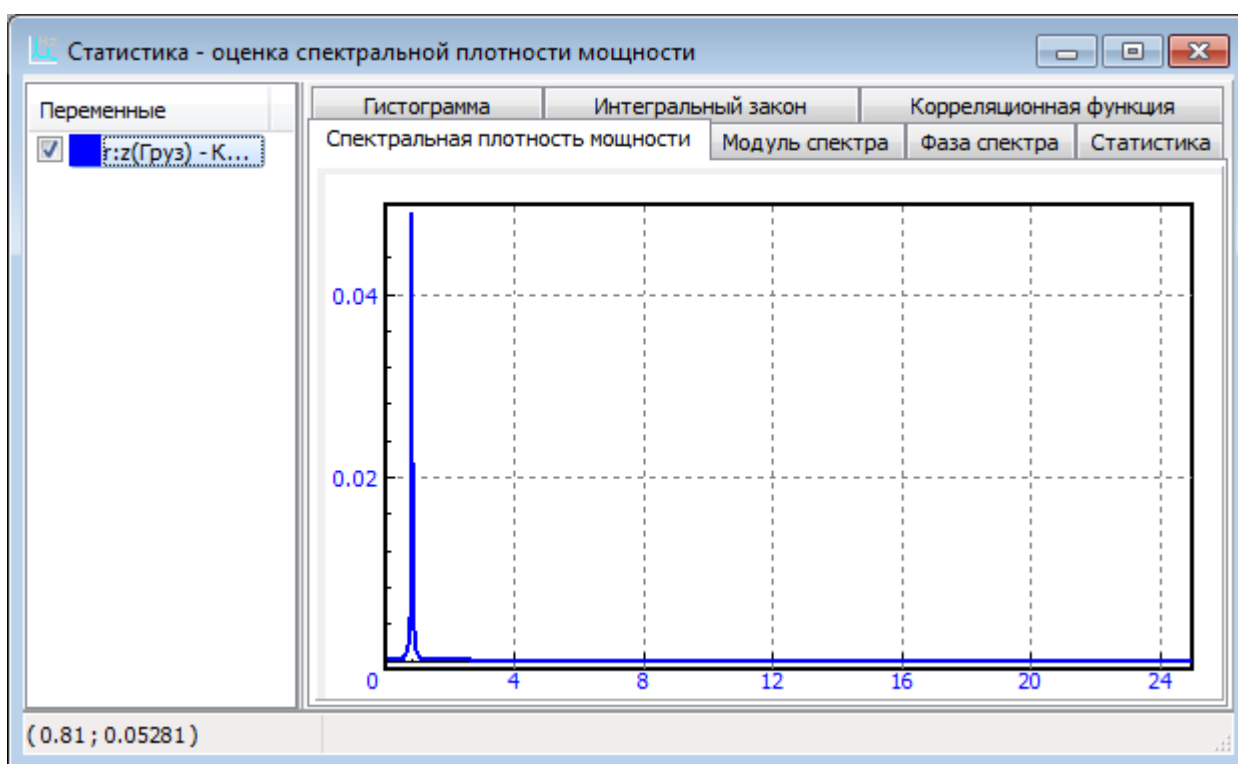


Рис. 2.23. Спектральная плотность мощности незатухающих колебаний

Замечание. Для более точного определения частоты используйте изменение масштаба графика при помощи правой кнопки мыши и его положения при помощи левой кнопки мыши.

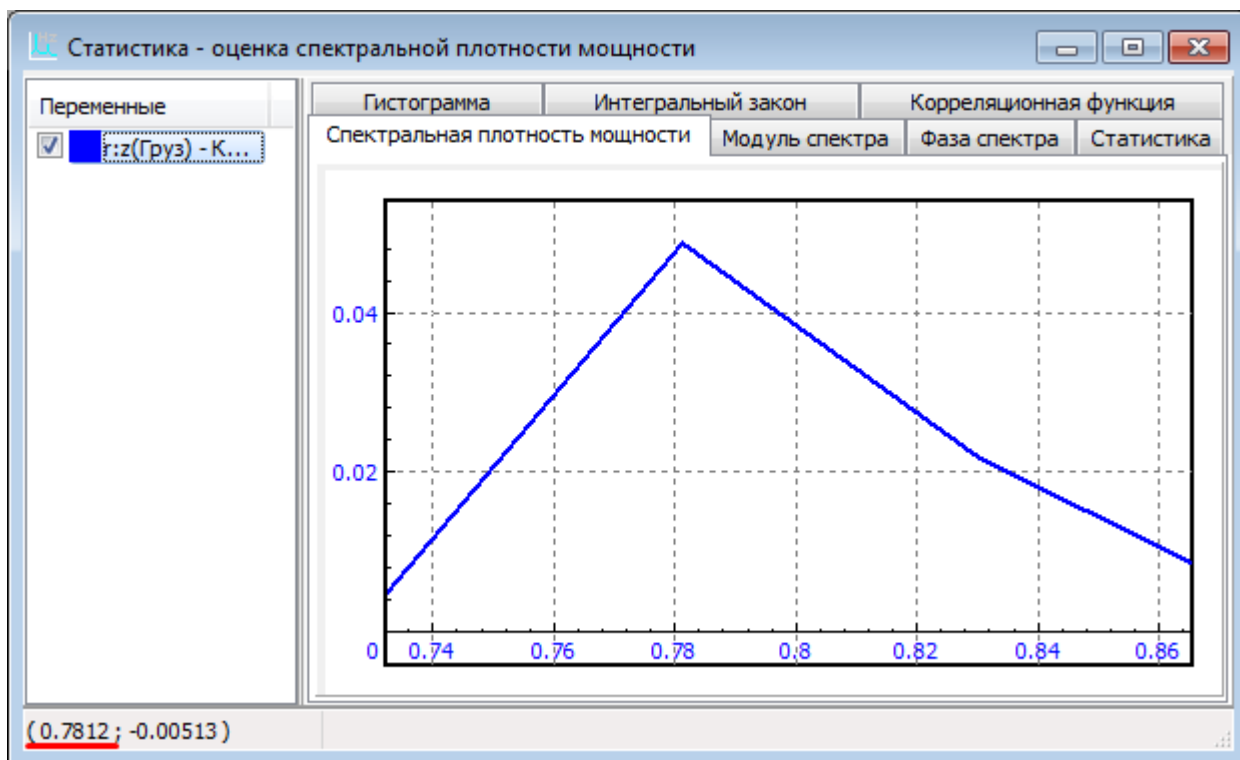


Рис. 2.24. Спектральная плотность мощности незатухающих колебаний

2.4.3. Статический и линейный анализ

Рассмотрим пример использования инструмента *статического и линейного анализа*. С помощью этого инструмента мы найдем положение равновесия системы, ее собственные частоты и формы колебаний, определим степень задемпфированности каждой (в нашем случае единственной) формы.


Итак, в начале закроем окна **Инспектора паузы** и **Инспектора моделирования объекта**.


1. Перейдите в окно **Инспектора паузы** и нажмите кнопку **Прервать**.
2. В окне **Инспектора моделирования объекта** нажмите **Выйти**.

Откроем окно линейного анализа

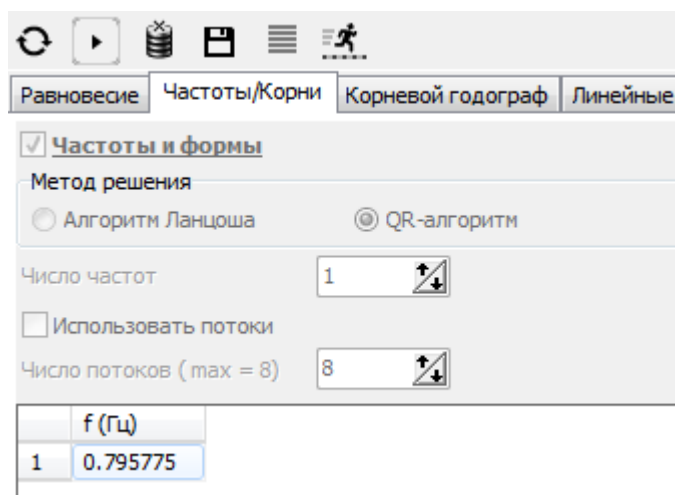
3. Выберите пункт меню **Анализ | Статический и линейный анализ...**


Найдем положение равновесия системы



4. Перейдите на вкладку **Равновесие** и нажмите кнопку  на панели инструментов. Появится сообщение: «Положение равновесия успешно рассчитано». Груз в анимационном окне займет положение равновесия.

Замечание. Найденные координаты системы, соответствующие положению равновесия можно сохранить в файл. Для этого используйте кнопку  на вкладке **Начальные условия**. Сохраненные начальные условия вы можете затем открыть в **Инспекторе моделирования объекта**, и, таким образом, запустить моделирование динамики из положения равновесия.

Найдем собственные частоты и формы колебаний

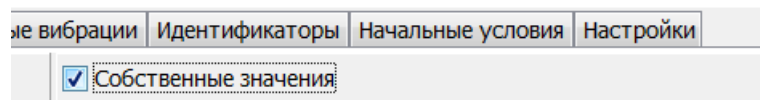



5. Перейдите на вкладку **Частоты/Корни**. Нажмите кнопку . В списке слева вы увидите все собственные частоты системы. Найденная собственная частота равна 0,795775 Гц, что соответствует круговой частоте 5,0000 рад/с.

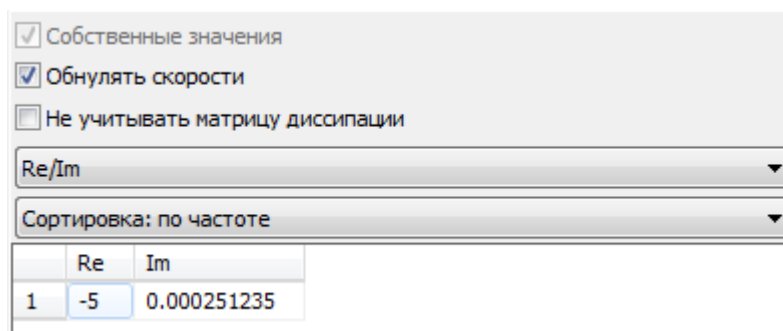
6. Для анимации формы колебаний нажмите кнопку  или дважды щелкните левой кнопкой мыши на значении частоты в таблице. Выставьте приемлемую **Амплитуду** и **Скорость** анимации. Нажмите кнопку  или клавишу **Esc** для остановки показа собственных форм.

Устойчивость равновесия

Найдем корни характеристического уравнения системы линеаризованных уравнений движения и по характеру корней будем судить об устойчивости модели.



7. Включите режим расчета собственных значений и нажмите на кнопку выполнения расчета .



8. Рассчитанные собственные значения указываются в правой таблице окна. Для каждой пары комплексно сопряженных корней указывается только один корень с положительной мнимой частью. Выберите режим отображение корней **Re/Im** (действительная и мнимая части). Как видим, действительная часть корней меньше нуля. Таким образом, можно сделать вывод, что положение равновесия асимптотически устойчиво.

Доля демпфирования от критического

9. Определим величину доли демпфирования. Выберите режим отображение корней **Частота/Доля демпфирования**. Как видим, случаю $\mu = 100$ соответствует нулевая частота, точнее, очень маленькая - вследствие ошибок округления, а доля демпфирования составляет 100% от критического.

Собственные значения
 Обнулять скорости
 Не учитывать матрицу диссипации

Частота/Доля демпфирования ▾

Сортировка: по частоте ▾

	f (Гц)	Beta(%) / r
1	3.99853E-5	100.000

Замечание. Расчет доли демпфирования позволяет оценить степень задемпфированности каждой собственной формы и, таким образом, при необходимости уточнить параметры гасителей колебаний и/или места их прикрепления к элементам конструкции.

10. Вы можете поменять значение коэффициента диссипации на вкладке **Идентификаторы** и посмотреть, как меняются корни и доля демпфирования.
11. Закройте окно линейного анализа.

2.4.4. Вынужденные колебания

Рассмотрим моделирование вынужденных колебаний без учета сил сопротивления.

1. Удалите все статические переменные из графического окна. Оставьте только первую (динамическую) переменную.
2. Запустите **Инспектор моделирования объекта** (пункт меню **Анализ | Моделирование...**).
3. Перейдите на вкладку идентификаторы. Установите следующие значения параметров: **$a = 0.05$, $\omega = 8$, $\mu = 0$** .
4. Запустите моделирование. Теперь вы видите, что точка подвеса пружины также совершает колебания. График положения груза в проекции на вертикальную ось представлен на рис. 2.25.

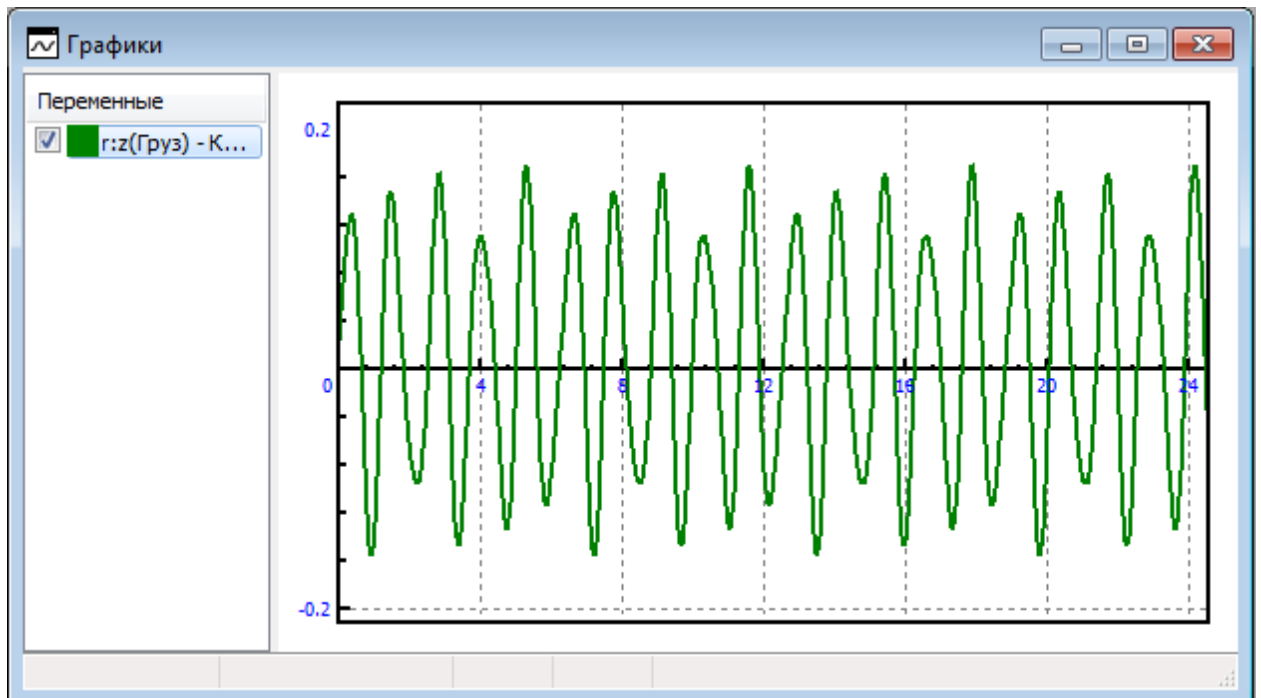


Рис. 2.25. Вынужденные колебания: частота колебаний точки подвеса пружины 8 рад/с

Резонанс

В заключение рассмотрим случай, когда частота возбуждения равна собственной частоте колебаний – резонанс.

1. В окне **Режима паузы** нажмите кнопку **Прервать**.
2. В **Инспекторе моделирования объекта** установите $\omega = 5$.
3. Запустите моделирование. Как и ожидалось, в резонансном случае амплитуда колебаний возрастает с течением времени, см. рис. 2.26.

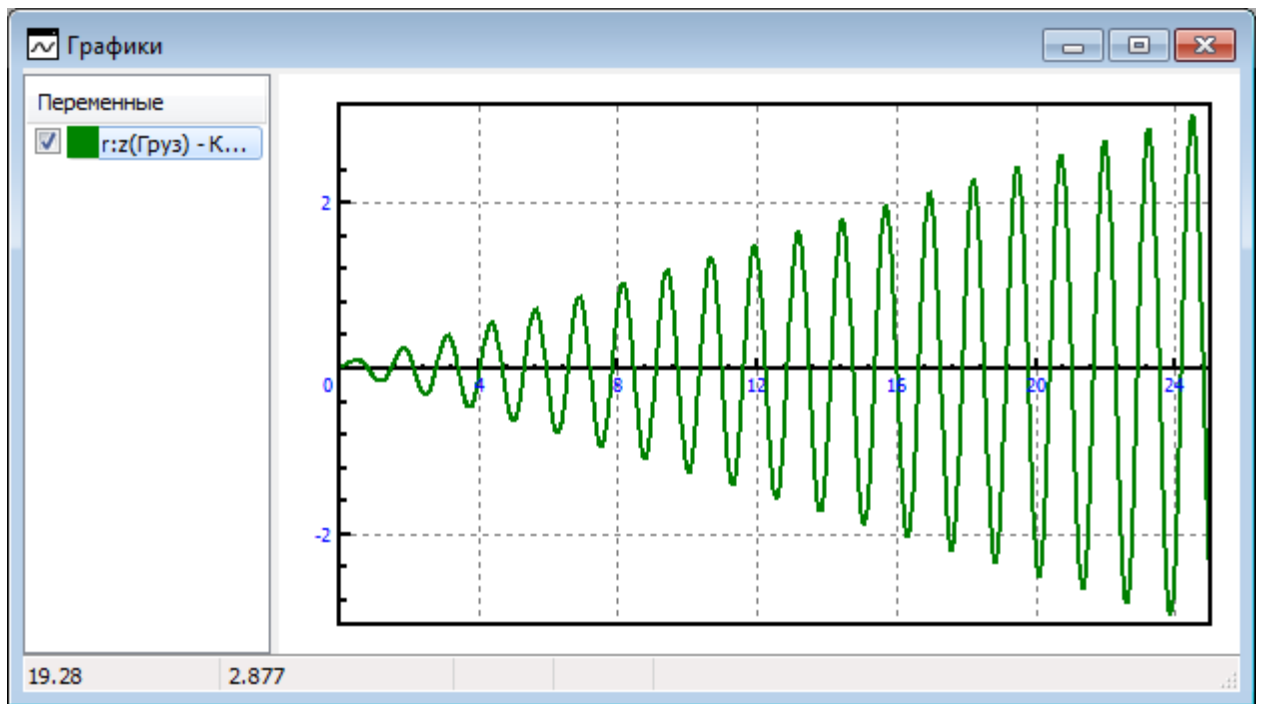


Рис. 2.26. Вынужденные колебания: резонанс

3. Консольная балка

3.1. Что мы изучим

В данном уроке рассмотрим консольную балку, для которой найдем положение равновесия, собственные частоты и формы и потерю устойчивости по Эйлеру. Результаты компьютерного моделирования для опытов, описанных выше, сравним с известными аналитическими решениями.

3.2. Описание модели

Для моделирования балки будем использовать метод отдельных тел [1]. В методе отдельных тел балка рассматривается как цепочка шарнирно связанных абсолютно твердых стержней, соединенных вращательными шарнирами. Концевые стержни имеют длину $l/2$, а внутренние – l , где $l = L/(N - 1)$, L – длина балки, N – число стержней. Крайний левый стержень жестко связан с опорой. Каждая пара стержней связана вращательным шарниром, содержащим линейный упруго-диссипативный силовой элемент с коэффициентом жесткости c и коэффициентом демпфирования α , рис. 3.1.

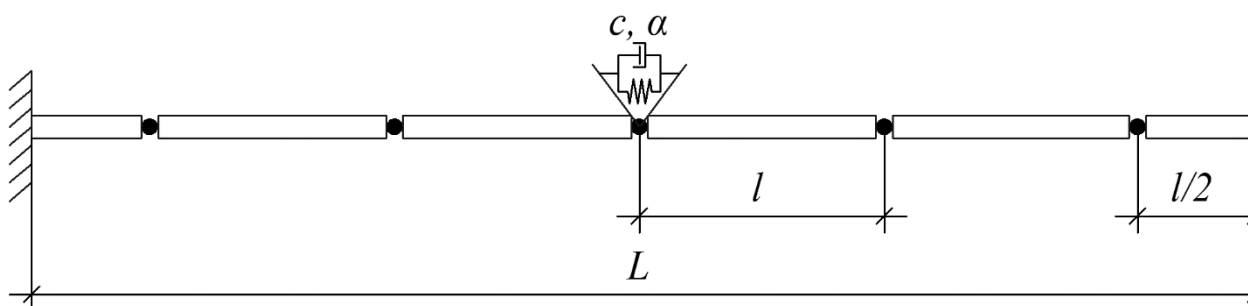


Рис. 3.1 Модель упругой балки как цепочка абсолютно твердых тел

В качестве примера в уроке рассмотрим стальную балку ($E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³) круглого поперечного сечения длиной $L = 3$ м. Балку дискретизируем на 11 абсолютно твердых стержней. Готовую модель вы можете найти в каталоге

[{Данные УМ}\SAMPLES\TUTORIAL\cantilever_beam](#)

или скачать по адресу

www.universalmecanichism.com/download/90/cantilever_beam.zip.

3.3. Создание модели

Запустите программу **UM Input** и создайте новый объект. В список параметров модели добавьте следующие параметры: *BeamLength*, *YoungsModulus*, *l*, *d*, *J*, *сах*, *дах*. Инициализируйте значения параметров согласно табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Параметры модели балки

Имя	Выражение	Комментарий
BeamLength	3	Длина балки
YoungsModulus	2.1000000E+11	Модуль упругости
l	BeamLength/10	Длина абсолютно жесткого стержня
d	2*l/75	Диаметр сечения балки
J	$\pi * d * d * d * d / 64$	Момент инерции сечения
сах	YoungsModulus * J / l	Коэффициент жесткости
дах	5	Коэффициент демпфирования

3.3.1. Создание графических объектов

Модель будет содержать 4 графических объекта: один для опоры и три для балки.

Опора

Создадим графический образ опоры.

1. Создайте новый графический объект типа **Параллелепипед**.
2. Назначьте ему имя **Support** и установите следующие параметры:

$$A = 0.5;$$

$$B = 0.05;$$

$$C = 0.5.$$
3. Перейдите на вкладку **Положение ГЭ**. В полях **Сдвиг | y** и **Сдвиг | z** установите значения **-0.025** и **-0.25** соответственно.
4. Перейдите на вкладку **Материал**. В поле **Плотность** задайте значение **7800**.
5. Перейдите на вкладку **Цвета**. Установите для графического элемента **коричневый** диффузный цвет.

Стержни

Создадим графические образы стержней.

1. Создайте новый графический объект типа **Конус**.
2. Назначьте ему имя **Rod1** и установите следующие параметры:

$$R2 = d/2;$$

$$R1 = d/2;$$

$$h = l/2.$$

3. Перейдите на вкладку **Положение ГЭ**. В поле **Сдвиг | у** введите $-l/4$. В группе **Поворот** выберите ось **X** и задайте значение **-90**, рис. 3.2.
4. Перейдите на вкладку **Материал**. В поле **Плотность** задайте значение **7850**.
5. Перейдите на вкладку **Цвета**. Установите для графического элемента **синий** диффузный цвет.
6. Создайте еще один графический объект типа **Конус**. Назначьте ему имя **Rod2** и установите следующие параметры:
$$\mathbf{R2 = d/2;}$$
$$\mathbf{R1 = d/2;}$$
$$\mathbf{h = l.}$$
7. Перейдите на вкладку **Положение ГЭ**. В поле **Сдвиг | у** введите $-l/2$. В группе **Поворот** выберите ось **X** и задайте значение **-90**.
8. Перейдите на вкладку **Материал**. В поле **Плотность** задайте значение **7850**.
9. Перейдите на вкладку **Цвета**. Установите для графического элемента **желтый** диффузный цвет.
10. Создайте копию графического объекта **Rod2**. Назначьте новому графическому объекту имя **Rod3** и установите **синий** диффузный цвет.

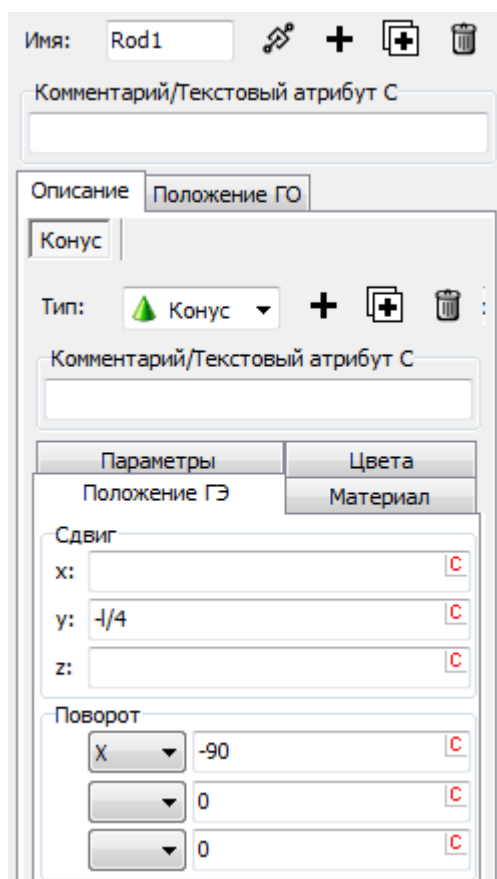


Рис. 3.2. Задание положения и ориентации ГЭ Rod1

3.3.2. Создание тел

Опора

Создадим новое твердое тело – опору.

1. Добавьте новое твердое тело.
2. Назначьте ему имя **Support**.
3. Назначьте телу графический образ **Support**.
4. Активируйте режим **Автоматический расчет инерционных параметров**, рис. 3.3. В этом режиме инерционные параметры рассчитываются автоматически по графическому образу, назначенному телу.

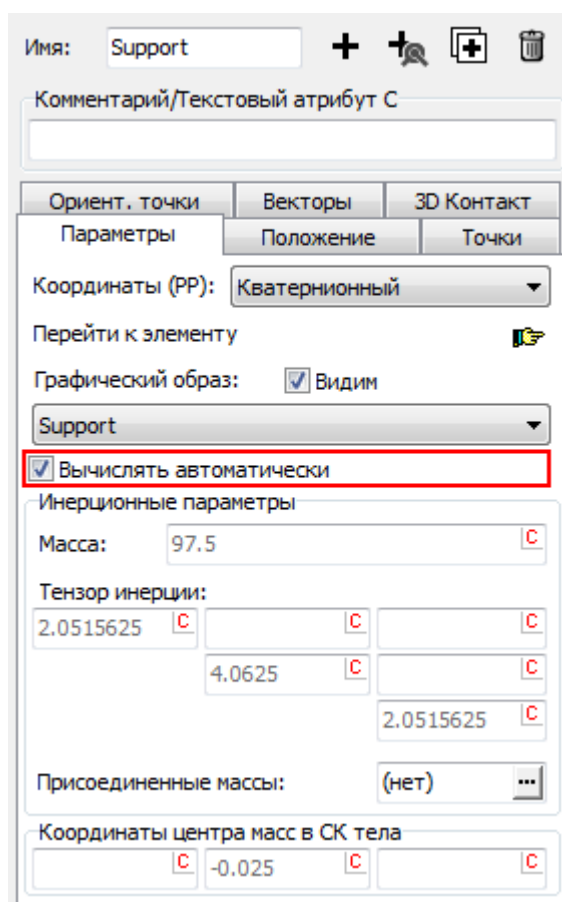


Рис. 3.3. Автоматическое вычисление инерционных параметров по графическому образу

Стержни


Создадим 11 стержней, которые составят консольную балку.

1. Добавьте 11 новых твердых тел.
2. Назначьте им имена **Body1**, **Body2**, ..., **Body11**.
3. Телам **Body1** и **Body11** назначьте графический образ **Rod1**, телам **Body2**, **Body4**, ..., **Body10** назначьте графический образ **Rod2**, а телам **Body3**, **Body5**, ..., **Body9** – графический образ **Rod3**.
4. Для всех тел активируйте режим **Автоматический расчет инерционных параметров**, рис. 3.3.

3.3.3. Создание шарниров

Шарнир для опоры

Опора является неподвижным телом, т.е. не имеет степеней свободы. Введем шарнир, жестко связывающий базу и опору.

1. В дереве элементов модели выберите **Тела | Support**.
2. Нажмите кнопку **Перейти к элементу**  и выберите пункт меню **Создать шарнир**.
3. В появившемся списке типов шарниров выберите **6 ст. свободы**. После этого будет создан новый шарнир указанного типа, у которого в качестве второго тела задана опора (Support). Данный шарнир назначает телу шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные степени свободы.
4. Назначьте первым телом **Base0**.
5. Выключите все шарнирные степени свободы, тем самым жестко связав опору и базу, рис. 3.4.

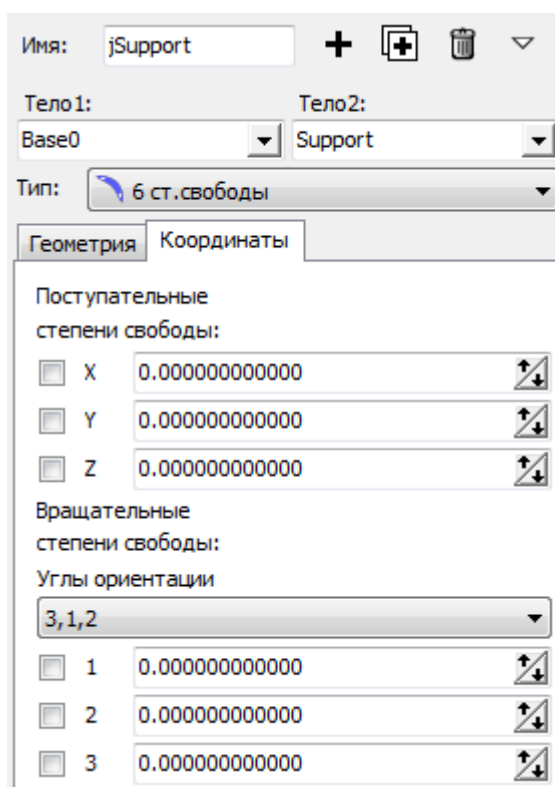



Рис. 3.4. Шарнир для тела **Support**

Шарнир между первым стержнем и опорой

Создадим шарнир, который будет удовлетворять условиям жесткого заземления балки, т.е. запретит любые перемещения ее левого конца.

1. В дереве элементов модели выберите **Тела | Body1**.
2. Нажмите кнопку **Перейти к элементу**  и создайте шарнир типа **6 ст. свободы**.
3. Назначьте шарниру имя **jSupportBody1**.
4. Назначьте первым телом **Support**.

5. Перейдите на вкладку **Геометрия | Тело 2**. В поле **Сдвиг | у** введите $-l/4$.
6. Выключите все шарнирные степени свободы, тем самым жестко связав стержень и опору.

Шарниры между стержнями

Введем между стержнями вращательные шарниры с упруго-диссипативными силами.

1. В дереве элементов модели выберите **Тела | Body2**.
2. Нажмите кнопку **Перейти к элементу** и создайте шарнир типа **Вращательный**.
3. Назначьте шарниру имя **jBody1Body2**.
4. Назначьте первым телом **Body1**.
5. На вкладке **Геометрия** для первого стержня (**Body1**) в группе **Шарнирные точки** укажите координаты его правого конца, а для второго (**Body2**) – левого, рис. 3.5.

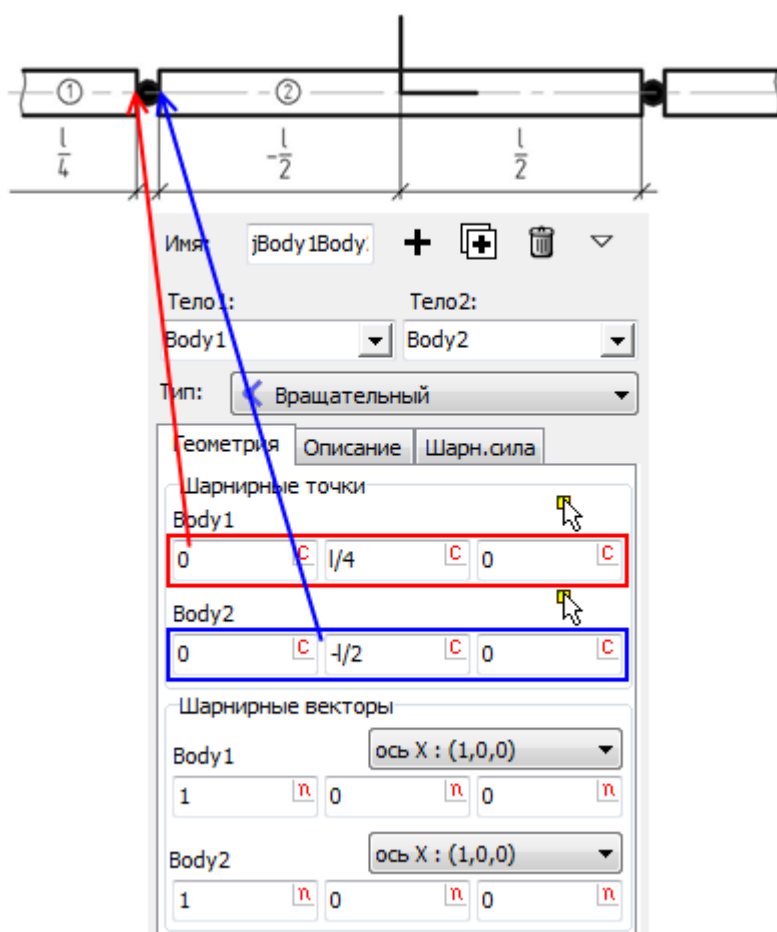


Рис. 3.5. Вращательный шарнир между телами **Body1** и **Body2**

6. Перейдите на вкладку **Шарн. сила** и укажите тип шарнирной силы **Линейный**. В поле **Коэф. жесткости (c)** введите cax , а в поле **Коэф. диссипации (d)** введите dax , рис. 3.6.
7. По аналогии создайте шарниры для тел **Body3-Body11**.

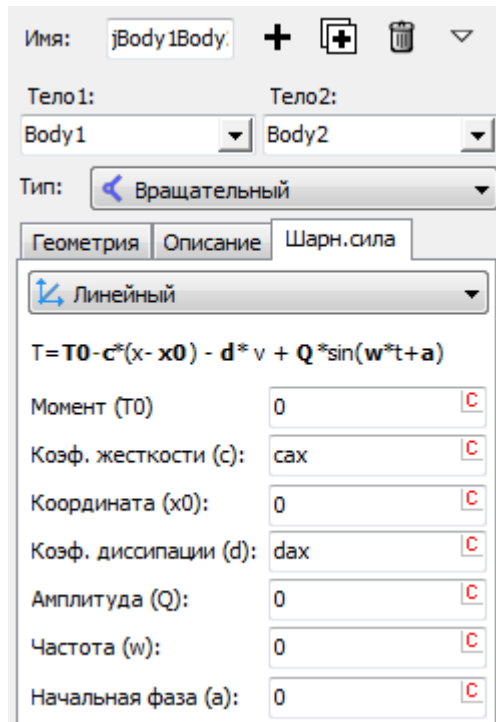


Рис. 3.6. Задание упруго-диссипативной силы в шарнире

3.3.4. Подготовка к моделированию

Проверим корректность и полноту описания модели. В дереве элементов модели выберите **Протокол** (*Ctrl+Alt+P*). Если модель описана корректно, то в инспекторе появится сообщение о том, что ошибок нет, рис. 3.7. При наличии ошибок моделирование невозможно. Кликнув левой кнопкой мыши по строке сообщения об ошибке или предупреждении можно перейти к описанию соответствующего элемента.

Сохраните модель под именем *cantilever_beam*. Перейдите в программу моделирования **UM Simulation**. Для этого выберите пункт главного меню **Объект | Моделирование...** (*Ctrl+M*). Автоматически будет запущена программа **UM Simulation**, в которой откроется модель балки.

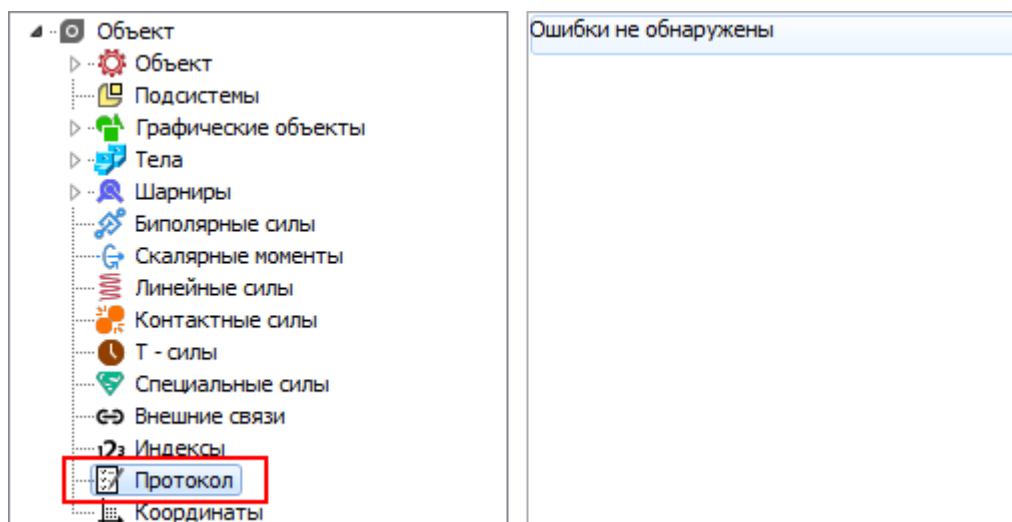


Рис. 3.7. Анализ корректности и полноты описания модели

3.4. Моделирование

Рассмотрим следующие задачи: расчет положения равновесия, расчет собственных частот и форм и потерю устойчивости по Эйлеру.


3.4.1. Расчет положения равновесия

Любая модель, созданная в УМ, изначально не находится в положении равновесия. Чтобы избежать при старте моделирования интенсивных переходных процессов, необходимо найти положение равновесия. Как правило, это первый шаг, с которого начинается работа с новой моделью. Положение равновесия можно найти двумя способами:

- численное решение уравнений равновесия;
- численное интегрирование уравнений движения с целью максимально приблизиться к положению равновесия.

Первый способ, как правило, более быстрый и дает более точный результат. Кроме того, путем численного интегрирования уравнений движения можно приблизиться только к асимптотически устойчивому положению равновесия, в то время как первый метод позволяет найти также неустойчивые положения равновесия, а также равновесие консервативных систем. Ниже рассмотрим оба этих способа.

3.4.1.1. Расчет положения равновесия численным решением уравнений равновесия

1. Запустите инструмент *статического и линейного анализа*.
2. Перейдите на вкладку **Настройки | Общие настройки**. В группе **Расчет равновесия** укажите **Уравнения равновесия** как метод определения положения равновесия, рис. 3.8.
3. Перейдите на вкладку **Равновесие** и нажмите кнопку **Выполнить расчет** . После выполнения расчета балка в анимационном окне будет отображаться в положении равновесия, рис. 3.9.

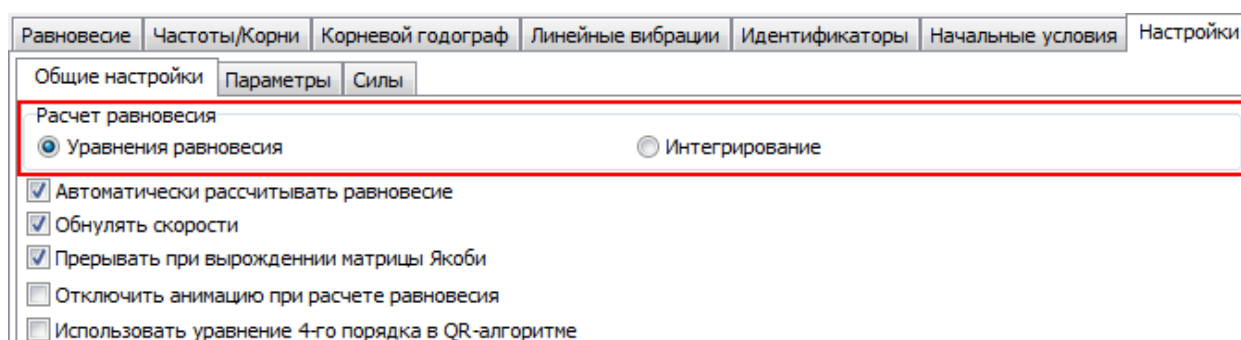


Рис. 3.8. Выбор метода определения положения равновесия

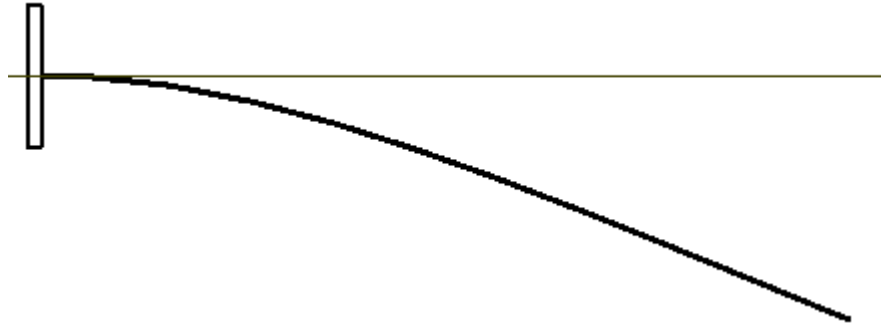



Рис. 3.9. Балка в положении равновесия

3.4.1.2. Расчет положения равновесия методом интегрирования уравнений движения

1. Перейдите на вкладку **Начальные условия**. Нажмите кнопку **Установить нулевые значения всем координатам $x=0$** и подтвердите действие.
2. Перейдите на вкладку **Настройки | Общие настройки**. В группе **Расчет равновесия** укажите **Интегрирование** как метод определения положения равновесия, рис. 3.8.
3. Перейдите на вкладку **Равновесие** и нажмите кнопку **Выполнить расчет** . Наблюдайте за процессом в анимационном окне.

При расчете положения равновесия методом интегрирования уравнений движения в качестве контроля близости системы к положению равновесия используется кинетическая энергия. Интегрирование продолжается до тех пор, пока кинетическая энергия не опустится ниже некоторого достаточно малого значения в заданном интервале времени (в окне).

С целью ускорения процесса сходимости при расчете положения равновесия автоматически добавляются дополнительные диссипативные силы. Обобщенные силы дополнительной диссипации пропорциональны произведению матрицы масс на столбец скоростей:

$$Q_{diss} = -\alpha M(q)\dot{q} \quad (3.1)$$

Коэффициент демпфирования α задается на вкладке **Настройки | Параметры** в поле **Параметр дополнительного демпфирования**. Запустите расчет равновесия с различными значениями коэффициента α , например, 0.1, 0.5 и 1. Наблюдайте за эффектом в анимационном окне. На рис. 3.10 приведено сравнение падения кинетической энергии при $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ и $\alpha = 1$.

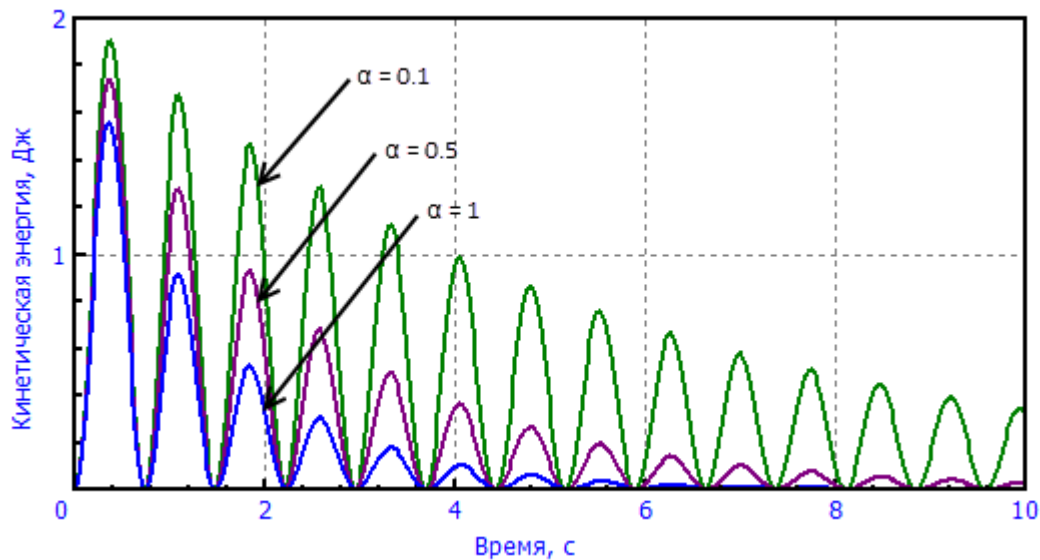


Рис. 3.10. Падение кинетической энергии при различных значениях параметра дополнительного демпфирования

3.4.2. Расчет собственных частот и форм колебаний

Собственные частоты колебаний консольной балки вычисляются по формуле [2]:

$$f_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 L}}, \quad (3.2)$$

где E – модуль упругости, Па;

J – момент инерции поперечного сечения балки, m^4 ;

m_0 – масса единицы длины балки, кг/м;

L – длина балки, м;

k – номер частоты;

λ – параметр, который определяется следующим образом:

$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_k = \frac{2k-1}{2}\pi \text{ при } k > 2. \quad (3.3)$$

Амплитудные функции (формы колебаний) определяются выражением [2]:

$$w_k(x) = K_2(\lambda_k)K_3\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - K_1(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right), \quad (3.4)$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 – функции Крылова, которые определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 K_1(x) &= \frac{1}{2}(\cosh(x) + \cos(x)), \\
 K_2(x) &= \frac{1}{2}(\sinh(x) + \sin(x)), \\
 K_3(x) &= \frac{1}{2}(\cosh(x) - \cos(x)), \\
 K_4(x) &= \frac{1}{2}(\sinh(x) - \sin(x)).
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Рассчитаем собственные частоты и формы колебаний балки в УМ. Сначала отключим силу тяжести, чтобы она не искажала собственные формы колебаний в анимационном окне. Для этого выполните следующие действия.

1. Закройте модель в программе **UM Simulation** и откройте ее в программе **UM Input**.
2. В дереве модели выберите **Объект**.
3. Перейдите на вкладку **Объект** на панели инспектора справа. В группе **Направление силы тяжести** в поле **ez** введите идентификатор **gravity_factor**, инициализировав его значением **0**, рис. 3.11.
4. Сохраните модель и перейдите в программу моделирования **UM Simulation**.

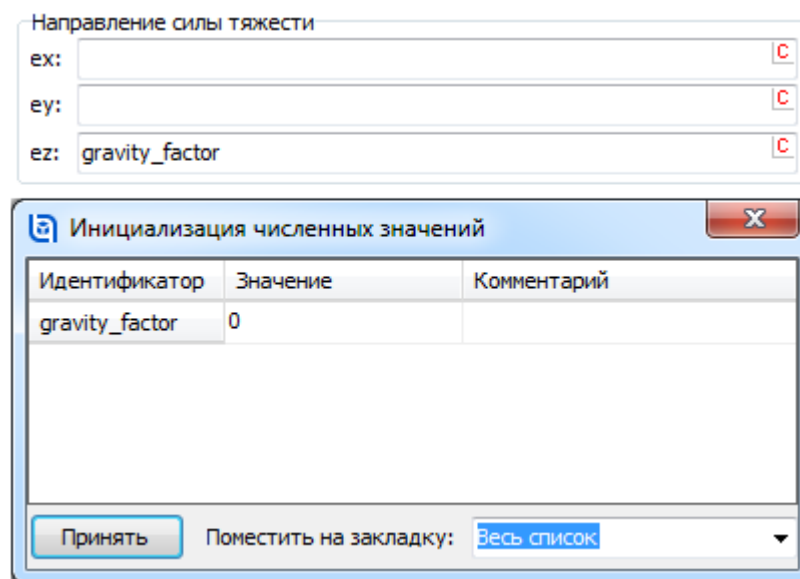


Рис. 3.11. Отключение силы тяжести

Запустите инструмент *статического и линейного анализа*. Перейдите на вкладку **Частоты/Корни**. Нажмите кнопку **Выполнить расчет** . После завершения расчета в списке слева вы увидите собственные частоты модели, рис. 3.12. Для анимации формы колебаний нажмите кнопку **Запустить/Остановить анимацию** или дважды кликните левой кнопкой мыши на значении частоты в таблице. Нажмите кнопку или клавишу **Esc** для того чтобы остановить анимацию.

Сравнение аналитических и расчетных значений частот колебаний балки приведено в табл. 3.2. Сопоставление низших форм колебаний дано на рис. 3.13.

	f (Гц)
1	0.650084
2	4.09723
3	11.5293
4	22.6942
5	37.6213
6	56.1331
7	77.5825
8	100.137
9	119.464
10	163.479

Рис. 3.12. Собственные частоты балки

Таблица 3.2.

Сравнение аналитических и численных результатов

<i>k</i>	Аналитическое решение, Гц	Численное решение, Гц	Относительная погрешность, %
1	0.64311	0.650084	-1.07
2	4.03059	4.09723	-1.63
3	11.2839	11.5293	-2.13
4	22.1165	22.6942	-2.55
5	36.5600	37.6213	-2.82

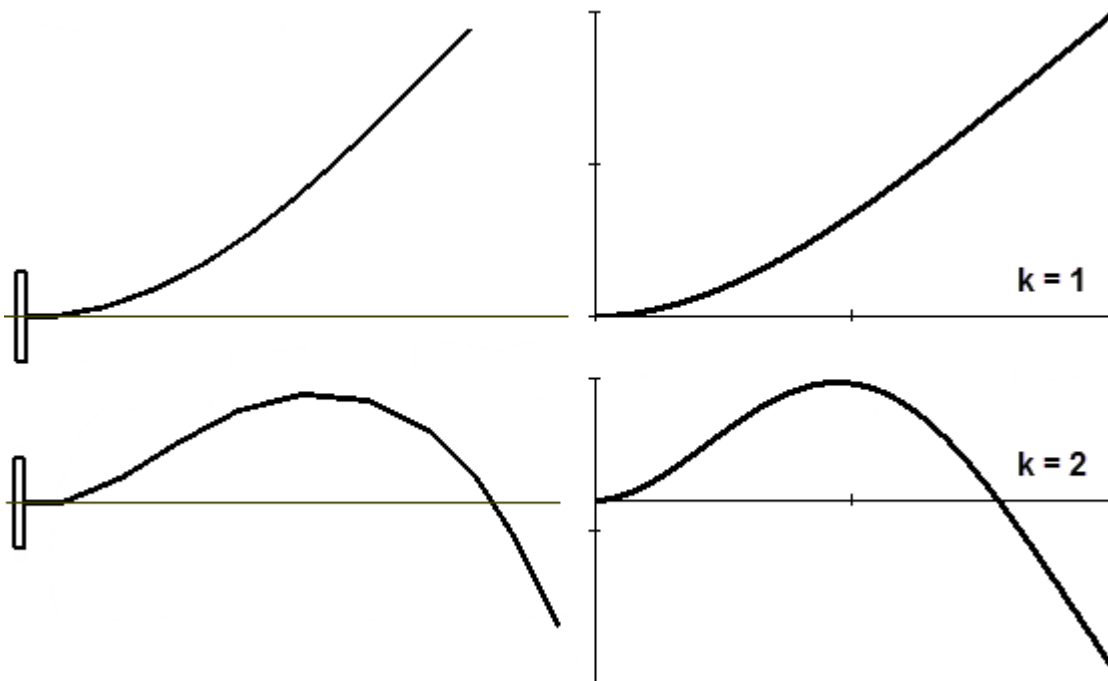


Рис. 3.13. Сопоставление первых двух форм колебаний консольной балки, полученных аналитически (справа) и численно (слева)

3.4.3. Потеря устойчивости по Эйлеру

Продольные силы, нагружающие балку, изменяют частоту ее собственных колебаний. При растяжении собственная частота повышается, при сжатии – понижается. При достижении продольной сжимающей силой критического значения балка перестает сопротивляться действию поперечной нагрузки, и частота ее изгибных колебаний обращается в ноль.

Критическая сила (эйлерова сила) для балки вычисляется по формуле [3]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu L)^2}, \quad (3.5)$$

где E – модуль упругости, Па;

J – момент инерции поперечного сечения балки, m^4 ;

μ – коэффициент приведения длины, для консольной балки $\mu = 2$;

L – длина балки, м;

Для рассматриваемой балки критическая сила равна

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,01 \cdot 10^{-10}}{(2 \cdot 3)^2} = 11,58 \text{ Н.} \quad (3.6)$$

Построим зависимость первой собственной частоты балки от величины сжимающей силы. Приложим к свободному концу балки сжимающую силу. Для этого выполните следующие действия.

1. Закройте модель в программе **UM Simulation** и откройте ее в программе **UM Input**.
2. В список параметров модели добавьте новый идентификатор **Fy**, присвойте ему значение **0**.
3. Добавьте в модель новую **T-силу**, рис. 3.14.

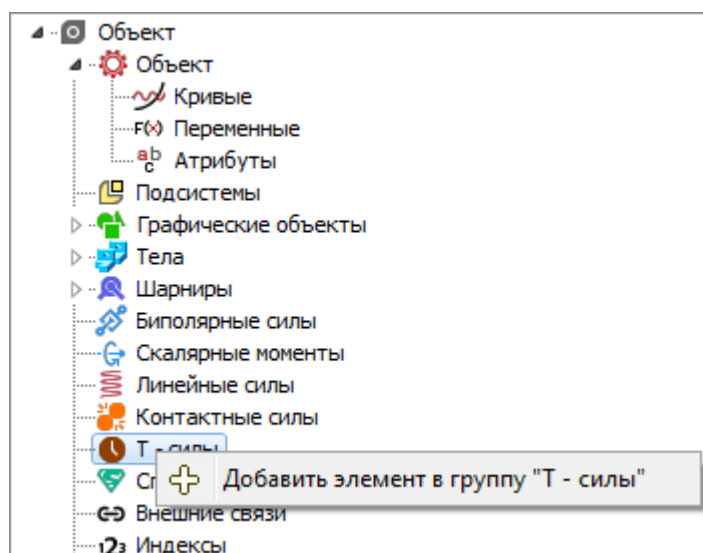


Рис. 3.14. Добавление новой **T-силы**

4. Назначьте силе имя **ForceY**.

5. Перейдите к настройкам **Т-силы** на панели инспектора справа. В поле **Тело 1** укажите **Base0**, в поле **Тело 2** – **Body11**, в поле **Задать в СК тела** – **Base0**. В поле **Точка приведения | у** введите $l/4$. В поле **Сила | у** введите $-F_y$, рис. 3.15.
6. Сохраните модель и перейдите в программу моделирования **UM Simulation**.

Рис. 3.15. Т-сила ForceY

Запустите инструмент *статического и линейного анализа*. Перейдите на вкладку **Корневой годограф**. В группе **Тип расчета** укажите **Частоты**. В поле **Идентификатор** выберите F_y . В полях **Границы** назначьте границы изменения идентификатора. В верхнем поле (начальное значение) введите **0**, в нижнем поле (конечное значение) введите значение несколько больше критической силы, например, **12**. В поле **Разбивка** введите **20**, т.е. будет выполнено 20 расчетов с равным шагом приращения указанного идентификатора. Перейдите на вкладку **Настройки | Общие настройки**. В группе **Расчет равновесия** укажите **Уравнения равновесия** как метод определения положения равновесия, рис. 3.9. Вернитесь на вкладку **Корневой годограф** и нажмите кнопку **Выполнить расчет** . После завершения расчета постройте график зависимости первой собственной частоты балки от величины идентификатора F_y , нажав кнопку в окне инструмента *статического и линейного анализа*, рис. 3.16. Пересечение годографа с осью абсцисс соответствует потере устойчивости, рис. 3.17. Сравнение аналитического и численного решения свидетельствует об их близости.

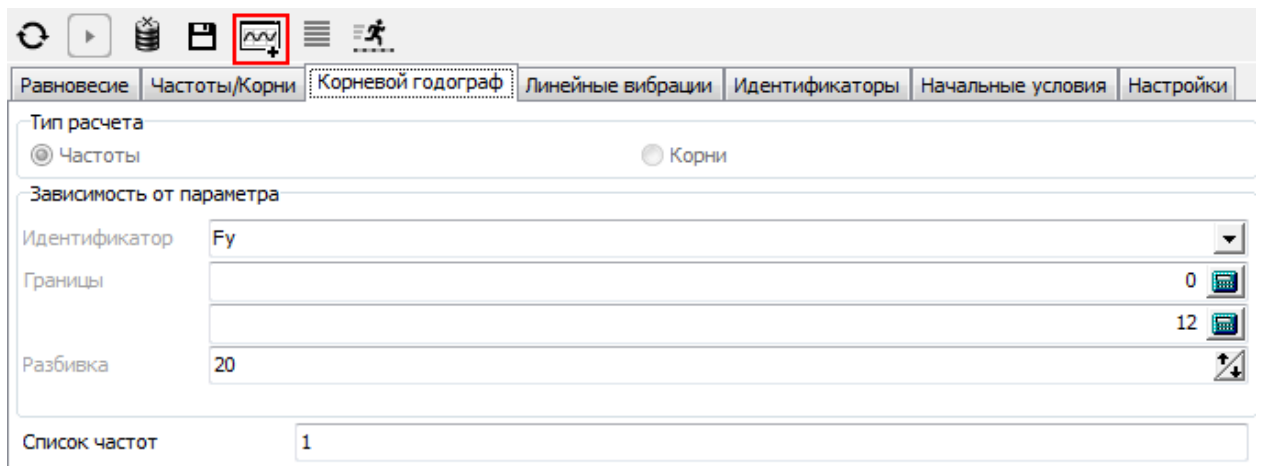


Рис. 3.16. Построение корневого годографа

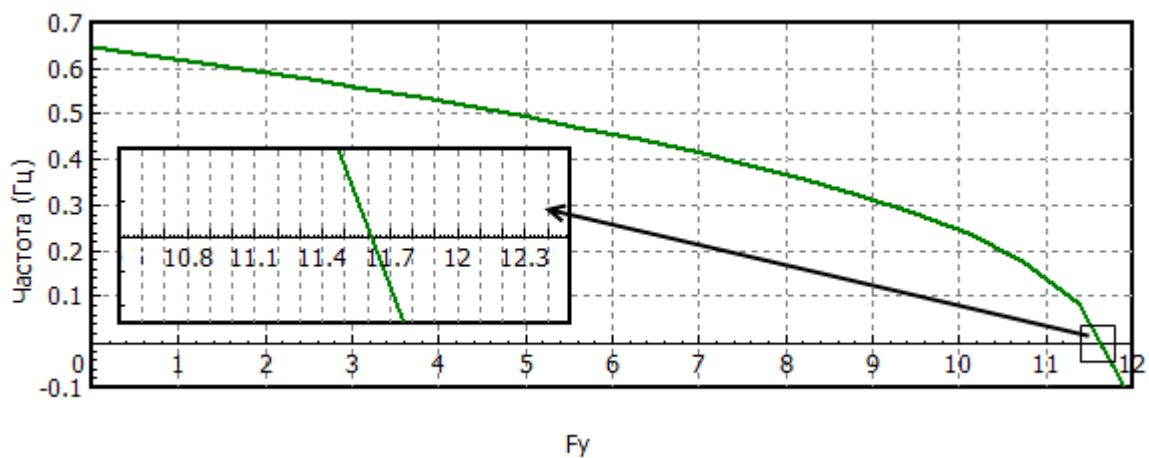


Рис. 3.17. Зависимость первой собственной частоты балки от величины сжимающей силы

3.4.4. Большие прогибы

Рассмотрим случай нагружения консольной балки вертикальной силой на свободном конце, вызывающей большие перемещения концевого сечения: вертикальное w и горизонтальное u . В [4] приводится аналитическое решение этой задачи. Величины вертикального и горизонтального перемещений конца консольной балки в безразмерном виде, приведенным к длине балки, можно получить из уравнений

$$\frac{w}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EJ}{PL^2}} [E(k) - E(k, \varphi)], \tag{3.7}$$

$$\frac{u}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EJ \sin \theta}{PL^2}}, \tag{3.8}$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода;

$E(k, \varphi)$ – эллиптический интеграл второго рода;

E – модуль упругости, Па;

J – момент инерции поперечного сечения балки, м⁴;

P – вертикальная нагрузка, Н;

θ – угол поворота конца балки;

L – длина балки, м.

Величины горизонтального и вертикального перемещений в безразмерном виде определяются отношением их прогибов к длине балки w/L и u/L от параметра нагрузки k , рассчитываемого по формуле:

$$k = PL^2/EJ. \tag{3.9}$$

Поскольку решение громоздко, оно здесь приводиться не будет. Решение для некоторых значений параметра нагрузки k приведено в табл. 3.3.

Таблица 3.3.

Перемещения незакрепленного конца консольной балки с сосредоточенной силой

$k = PL^2/EJ$	w/L	u/L
0.25	0.083	0.004
0.50	0.162	0.016
0.75	0.235	0.034
1	0.302	0.056
2	0.494	0.160
3	0.603	0.255
4	0.670	0.329
5	0.714	0.388
6	0.744	0.434
7	0.767	0.472
8	0.785	0.504
9	0.799	0.531


Сопоставим аналитическое решение с численным решением в УМ. Сначала приложим к свободному концу балки вертикальную силу, вызывающую большие перемещения. Для этого выполните следующие действия.

1. Закройте модель в программе **UM Simulation** и откройте ее в программе **UM Input**.
2. В список параметров модели добавьте новый идентификатор **Fz** и инициализируйте его выражением **k*YoungsModulus*J/(BeamLength*BeamLength)**, как показано на рис. 3.18
3. Добавьте в модель новую **T-силу** – **ForceZ**.
4. Перейдите к настройкам **T-силы** на панели инспектора справа. В поле **Тело 1** укажите **Base0**, в поле **Тело 2** – **Body11**, в поле **Задать в СК тела** – **Base0**. В поле **Точка приведения | y** введите **l/4**. В поле **Сила | z** введите **Fz**.
5. Сохраните модель и откройте её в программе моделирования **UM Simulation**.


Имя	Выражение	Значение	Комментарий
BeamLength	3		длина балки
YoungsModulus	2.1000000E+11		модуль упругости
l	BeamLength/10	0.3	длина абсолютно жесткого стержня
d	2*/75	0.008	диаметр сечения балки
J	pi*d*d*d*d/64	2.0106193E-10	момент инерции сечения
сax	YoungsModulus*J/l	140.74335	коэффициент жесткости
dax	5		коэффициент демпфирования
gravity_factor	0		
Fy	0		
k	0		параметр нагрузки
Fz	k*YoungsModulus*J/(BeamLength*BeamLength)	0	

Рис. 3.18. Параметризация вертикальной силы

Создадим переменные w/L и u/L .

1. Откройте **Мастер переменных (Инструменты | Мастер переменных...)**.
2. Перейдите на вкладку **Идентификаторы**, в списке идентификаторов выберите **BeamLength**. Кнопкой  поместите выбранный идентификатор в контейнер переменных.
3. Далее создадим переменную, соответствующую вертикальному перемещению свободного конца балки. Перейдите на вкладку **Линейные переменные**, в списке тел выберите **Body11**, в поле **Координаты точки в системе координат тела | y** введите **0.075**, в группе **Тип** выберите **Координата**, в поле **Компонента** выберите **Z**. Поместите переменную в контейнер.
4. После чего создадим переменную, соответствующую горизонтальному перемещению той же точки балки. Для этого понадобится поменять только поле **Компонента**. Таким образом, в поле **Компонента** выберите **Y** и поместите переменную в контейнер.

После этого контейнер переменных должен содержать 3 переменные: $BeamLength$, $r:z(Body11)$ и $r:y(Body11)$.

5. Перейдите на вкладку **Выражение**. Создадим переменную w/L . Вертикальному перемещению w соответствует переменная $r:z(Body11)$, а длине балки L переменная $BeamLength$. Выполните следующие действия:
 - добавьте оператор деления с помощью кнопки ;
 - с помощью мыши перетащите переменные $r:z(Body11)$ и $BeamLength$ в поля оператора, рис. 3.19;
 - в поле с названием переменной введите w/L и отправьте переменную в контейнер, рис. 3.19.

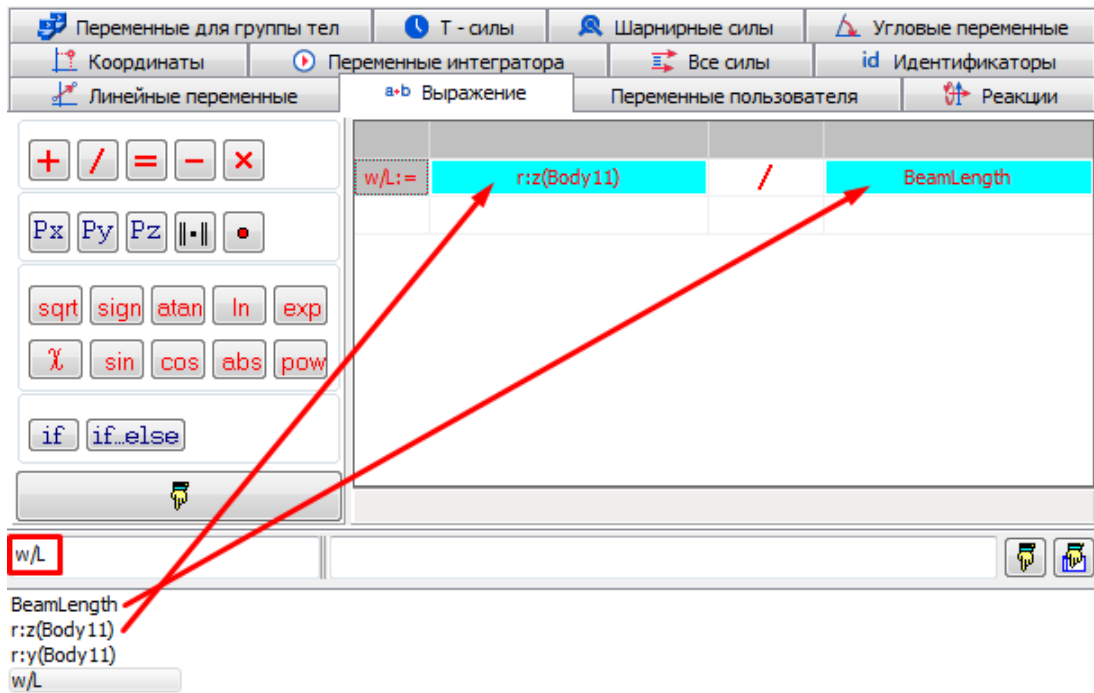


Рис. 3.19. Создание переменной w/L

6. Создадим переменную u/L . Горизонтальное перемещение u определяется выражением $BeamLength - r:y(Body11)$. Выполните следующие действия:
- добавьте операторы вычитания $-$ и деления $/$;
 - с помощью мыши перетащите переменные $r:y(Body11)$ и $BeamLength$ в поля операторов согласно рис. 3.20.
 - в поле с названием переменной введите u/L и отправьте переменную в контейнер.

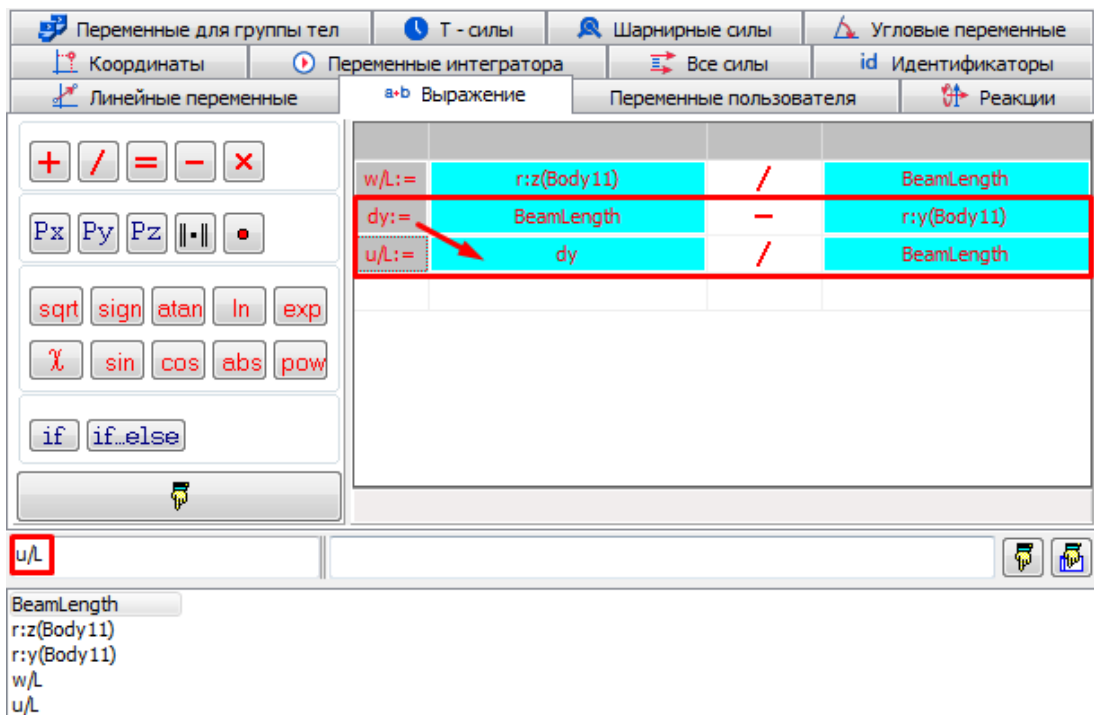


Рис. 3.20. Создание переменной u/L

Перейдем к расчету прогибов. Запустите инструмент *статического и линейного анализа*. Перейдите на вкладку **Равновесие**. С помощью мыши перетащите переменные w/L и u/L из контейнера **Мастера переменных** в список переменных инструмента *статического и линейного анализа*, рис. 3.21.

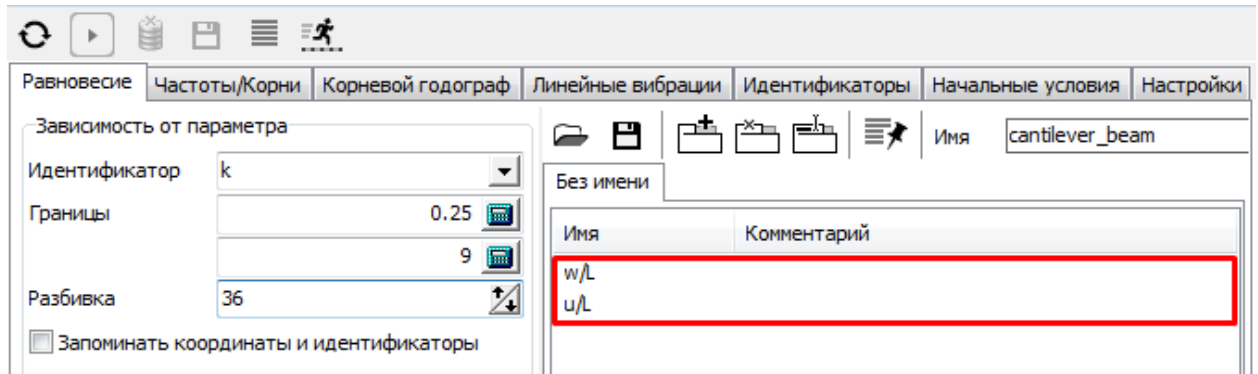


Рис. 3.21. Список переменных для расчета

В поле **Идентификатор** выберите k . В полях **Границы** назначьте границы изменения идентификатора. В верхнем поле (начальное значение) введите **0.25**, в нижнем поле (конечное значение) введите **9**. В поле **Разбивка** введите **36**, что соответствует шагу приращения параметра нагрузки 0.25. Нажмите кнопку **Выполнить расчет** . После завершения расчета постройте графики зависимости перемещений незакрепленного конца балки от параметра нагрузки k . Для этого перетащите с помощью мыши рассчитанные переменные из списка переменных в графические окна через пункт меню Инструменты – Графическое окно. Графики приведены на рис. 3.22 и рис. 3.23.

Сравнение аналитических и расчетных значений приведено в табл. 3.4.

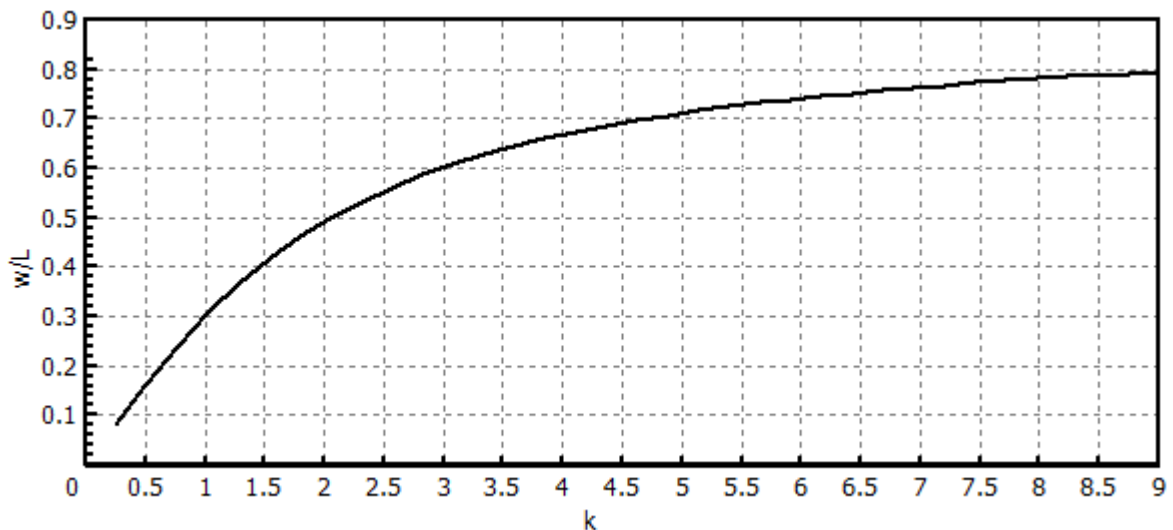


Рис. 3.22. Вертикальное перемещение

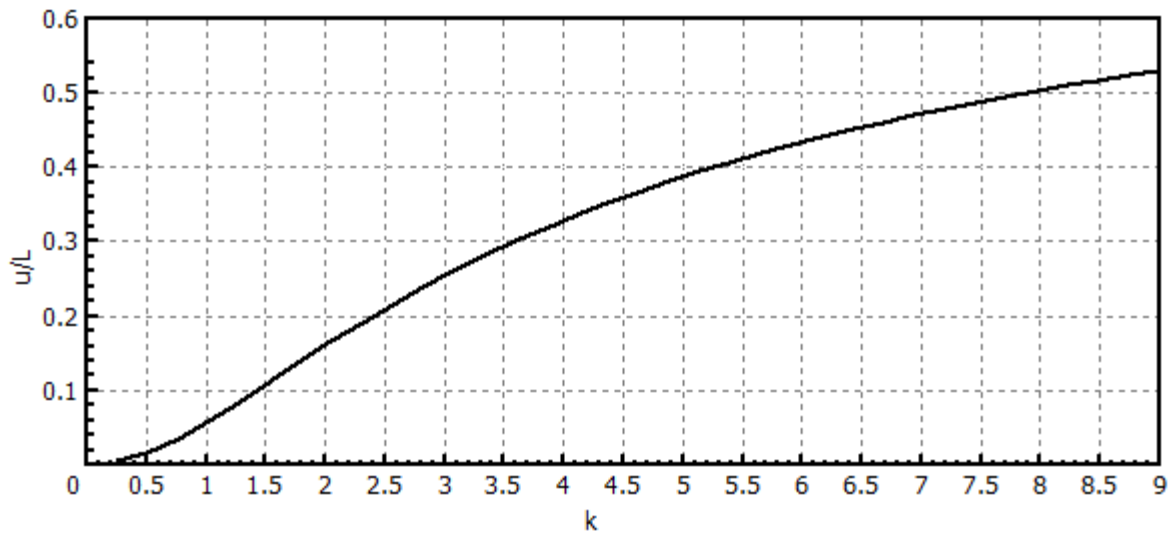


Рис. 3.23. Горизонтальное перемещение

Таблица 3.4.

Сравнение аналитических и численных результатов

$k = PL^2/EJ$	Аналитическое решение		Численное решение	
	w/L	u/L	w/L	u/L
0.25	0.083	0.004	0.082	0.004
0.50	0.162	0.016	0.162	0.016
0.75	0.235	0.034	0.235	0.034
1	0.302	0.056	0.301	0.056
2	0.494	0.160	0.492	0.161
3	0.603	0.255	0.601	0.254
4	0.670	0.329	0.667	0.329
5	0.714	0.388	0.711	0.387
6	0.744	0.434	0.741	0.434
7	0.767	0.472	0.764	0.472
8	0.785	0.504	0.781	0.504
9	0.799	0.531	0.795	0.531

4. Дальнейшее изучение программы

Вы познакомились с тремя примерами создания и моделирования механических систем: маятника, груза на пружине и консольной балки. Это позволило Вам пройти через все основные этапы создания и анализа динамики моделей.

Серия глав *Начинаем работать* включает также следующие главы, посвященные введению в использование отдельных модулей программы.

1. [Начинаем работать. Моделирование динамики автомобилей.](#)
2. [Начинаем работать. Моделирование динамики железнодорожных экипажей.](#)
3. [Начинаем работать. Модуль моделирования упругих тел.](#)
4. [Начинаем работать. Интерфейс с Matlab/Simulink и SimInTech.](#)
5. [Начинаем работать. Модуль многовариантных расчетов.](#)
6. [Начинаем работать. Модуль анализа динамической нагруженности и усталостной долговечности.](#)
7. [Начинаем работать. Создание моделей и анализ динамики гусеничных машин.](#)
8. [Начинаем работать. Служба распределенных вычислений \(UM Cluster\).](#)
9. [Начинаем работать. UM SENSORS – моделирование датчиков в системе помощи водителю.](#)
10. [Начинаем работать. Моделирование динамики поезда.](#)

Библиотека примеров для изучения

Руководство пользователя ПК «Универсальный механизм» включает [Главу 7](#), которая посвящена рассмотрению простых примеров, на которых изучается описание графических элементов, шарниров и силовых элементов различных типов. Изучение этих примеров позволит вам глубже ознакомиться с элементной базой программы и подходами к моделированию тех или иных механических систем. Библиотека моделей находится в каталоге [{Данные УМ}\SAMPLES\LIBRARY](#).

Файл [07_UM_Simulation_Examples.pdf](#) (глава 7) вы можете найти в каталоге [{Данные УМ}\MANUAL](#) или в интернете по адресу:

www.universalmechanism.com/download/90/rus/07_um_simulation_examples.pdf

5. Список литературы

- [1] Slavisa Salinic, Modeling of a light elastic beam by a system of rigid bodies // Theoret. Appl. Mech. – 2004.– V.31(3-4) – P.395-410.
- [2] В. Л. Бидерман, Теория механических колебаний: Учебник для вузов – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
- [3] А. С. Вольмир, Устойчивость механических систем – М.: Наука, 1967. – 984 с.
- [4] С. П. Тимошенко, Дж. Gere, Механика материалов: Учебник для вузов. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 672 с..
- [5] James M. Gere, Stephen P. Timoshenko, Mechanics of materials. Boston PWS Pub Co. 1997. 4th ed..
- [6] Euler–Bernoulli beam theory,
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory.
- [7] Euler's critical load, https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_critical_load.