

Компьютерное моделирование железнодорожного балласта в плоской твердотельной постановке¹

Теория и практика уплотнения балласта ж.-д. пути, базирующаяся на экспериментальных данных, полученных отечественными и зарубежными исследователями, не позволяет оперативно отвечать на вопросы эффективности новых технологий ремонта ж.-д. пути, применения современных путевых машин и перспективных рабочих органов. Используемые экспериментальные методы оценки степени уплотнения балласта трудоемки, обладают большой погрешностью, ограничены в применении и не позволяют с приемлемой точностью установить корреляционные связи в процессе уплотнения балласта при ремонтах пути и его работы под поездами. Актуальность проблемы уплотнения балласта в настоящее время определяется внедрением современных путеремонтных комплексов, обладающих огромными техническими возможностями, что требует тщательной отработки технологии их применения для обеспечения стабильного положения ж.-д. пути под действием поездной нагрузки в течение длительного времени его эксплуатации и, что не менее важно, – в начальный период, для исключения неконтролируемых осадков, перекосов и других расстройств пути. Современные путеремонтные комплексы включают путевые машины, различные по перечню технологических операций и роли в формировании балластной призмы: щебнеочистительные машины (СЧ, РМ, ЩОМ), вырезающие балласт, очищающие его от загрязнителей и формирующие предварительно балластную призму, иногда с вибрационным уплотнением слоя балласта ограниченной толщины; хоппер-дозаторы и планировщики балласта (РБ, ПБ), осуществляющие досыпку и планирование балласта; выправочно-подбивочно-рихтовочные (ВПР, 09-32, 08-275) и выправочно-подбивочно-отделочные (ВПО) машины, производящие постановку пути на требуемую отметку и уплотняющие балласт в локальных местах под шпалами посредством вибрационных рабочих органов; стабилизаторы (ДСП, DGS, БУМ), осуществляющие объемное уплотнение балластной призмы посредством интенсивного вибровоздействия. Какова доля каждого объекта технологической цепочки в формировании и обеспечении стабильности балластной призмы, какую роль играет фракционный состав балласта, толщина уплотняемого слоя, есть ли оптимальные соотношения между параметрами частиц балласта, выходными, технологическими параметрами рабочих органов путевых машин и степенью уплотнения балластной призмы после ремонта или строительства ж.-д. пути – эти и многие другие вопросы могут быть решены при создании модели балластной призмы в виде

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 02-01-00364.

виде случайного набора твердых тел, имеющих идентичные с реальным частицам балласта физические и геометрические характеристики.

Целью проводимых исследований является создание математической модели фрагмента балластной призмы ж.-д. пути, позволяющей проводить исследование процессов формирования текстуры балластного слоя при работе путевых машин и решать вопросы оптимизации фракционного состава балласта, выходных параметров рабочих органов путевых машин и технологии их применения.

Существует несколько принципиально различных подходов к этой проблеме. Основными из них являются:

- моделирование балласта как континуальной системы (например, с использованием МКЭ);
- твердотельная модель балласта (гранулированная среда).

Первый подход ограничен в применении ввиду того, что не учитывает напрямую геометрию частиц балластного слоя. Однако второй подход требует значительно больших вычислительных затрат в обычной постановке. Данная статья посвящена разработке и оптимизации компьютерной модели железнодорожного балласта в плоской твердотельной постановке. Под оптимизацией модели понимается комплекс мер, направленных на снижение числа операций, необходимых для выполнения одного шага интегрирования уравнений движения, а также на увеличение шага интегрирования. Таким образом, оптимизация модели призвана снизить затраты времени центрального процессора (ЦП) и дать возможность исследовать модели, содержащие до нескольких тысяч тел. В свою очередь, снижение числа арифметических операций в основном связано с поиском и реализацией быстрого алгоритма определения контактирующих тел по их положению. Увеличение шага интегрирования определяется выбором наиболее удачного численного метода интегрирования жестких обыкновенных дифференциальных уравнений и поиском формы представления матрицы Якоби уравнений движения, необходимой для реализации неявной схемы численного метода.

Результатом разработки модели явился специализированный модуль моделирования динамики балласта программного комплекса “Универсальный механизм”.

Все тела (гранулы), входящие в систему, представлены плоскими многоугольниками. Контакт между телами возникает при пересечении границ тел и приводит к возникновению сил упруго-диссипативного взаимодействия. При отсутствии контакта тела считаются невзаимодействующими.

В плоской постановке каждое тело системы имеет три степени свободы. Положение i -й гранулы балласта однозначно определяется в любой момент времени по координатам центра масс x_{ci} , y_{ci} и по углу поворота ϕ_i . Таким образом, балластная среда, состоящая из N гранул, имеет $3N$ степеней свободы, а ее уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_{ci} &= \sum_j F_{xij}^c, \\
m_i \ddot{y}_{ci} &= -m_i g + \sum_j F_{yij}^c, \\
J_{zi} \ddot{\phi}_i &= \sum_j m_z (F_{ij}^c).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь m_i , J_{zi} – масса и момент инерции i -й частицы; F_{ij}^c – контактная сила, возникающая между i -й и j -й гранулами. Для простоты записи в уравнениях движения (1) предполагается, что пара гранул контактирует только в одной точке (рис. 1). Матрица масс такой системы является диагональной.

Рассмотрим математическую модель контактных сил, действующих между телами. В основе контактного взаимодействия положим модель, в соответствии с которой силы контактного взаимодействия возникают только в вершинах ограничивающих многоугольников при их внедрении внутрь многоугольника, ограничивающего соседнюю гранулу. Величина силы контактного взаимодействия (точнее, ее нормальная составляющая) зависит от глубины внедрения Δ и скорости внедрения $\dot{\Delta}$. Внедрение Δ рассчитывается как минимальное расстояние от внедренной вершины до сторон многоугольника. При наличии острых углов в контурах многоугольников указанная модель может приводить к неверным результатам, поэтому острые углы “срезаются” в малых окрестностях вершин. Поскольку контактная сила зависит от расстояния между вершиной и одной из сторон многоугольника, назовем это взаимодействие контактом типа точка-прямая. По сути, это взаимодействие является частным случаем пространственного взаимодействия типа точка-плоскость [1], которое нашло широкое применение при моделировании динамики грузовых вагонов.

Разложим контактную силу на две составляющие: нормальную реакцию N , перпендикулярную контактной прямой, и силу трения F , лежащую на этой прямой. Как и в случае контакта типа точка-плоскость, примем линейную вязкоупругую модель нормальной силы $N = -c\Delta - \mu\dot{\Delta}$ с постоянными коэффициентами контактной жесткости c и диссипации μ . В соответствии с рис. 1 внедрение определяется по формуле

$$\Delta = n^T r_c, \quad r_c = r_2 + A_{02}\rho_2^2 - r_1 - A_{01}\rho_1^1.$$

Скорость внедрения вычисляется как производная по времени от этой величины

$$\dot{\Delta} = n^T [(v_2 + \dot{\omega}_2 \rho_2) - (v_1 + \dot{\omega}_1 [\rho_1 + r_c])] = n^T v_{c12}.$$

В приведенных зависимостях n означает нормаль к контактной плоскости; r_1, r_2 – радиус-векторы центров масс первого тела (содержащего контактную точку) и второго тела (контактная плоскость); A_{01}, A_{02} – матрицы направляющих косинусов; ρ_1, ρ_2 – радиусы-векторы контактной точки и точки

прямой в локальных системах координат; v_{c12} – вектор относительной скорости точки второго тела.

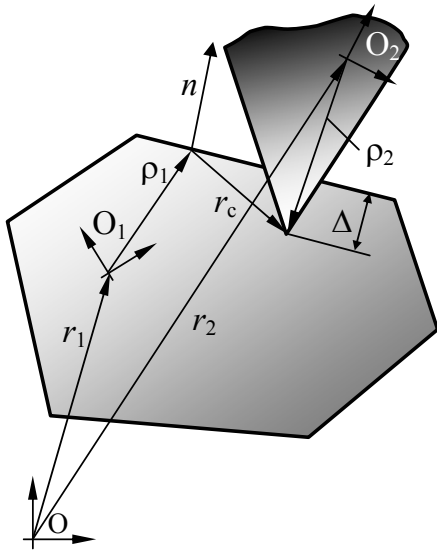


Рис. 1. Определение внедрения

Модель силы трения предполагает два режима: скольжение и сцепление. В режиме скольжения сила трения направлена против скорости скольжения точки второго тела по плоскости и равна

$$F_f = -fN(e_s^T v_{c12})e_s,$$

где f – коэффициент трения скольжения; e_s – орт, направленный по контактной прямой. Режим сцепления, а также условие перехода между режимами трения описаны в работе [1]. Коэффициенты жесткости и диссипации в выражениях

для нормальной силы N определяются исходя из введенной парциальной контактной частоты k_c и доли демпфирования β при контактом взаимодействии соседних гранул

$$c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} k_c^2; \quad \mu = 2\beta \sqrt{c \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Конкретное значение парциальной частоты выбирается таким образом, чтобы собственные частоты балласта были выше частоты виброуплотнения.

Существует несколько различных методов определения контакта многоугольников. Почти всегда задача разбивается на две самостоятельные части: определение контакта оболочек, описанных около многоугольников (“дальний” контакт) и уточнение контакта с учетом реальной геометрии (“ближний” контакт). В свою очередь, эти две задачи тоже решаются несколькими способами. Для “дальнего” контакта, например, можно выбрать оболочку в виде окружности, и тогда определение пересечения оболочек сводится к проверке условия $\|r_i - r_j\| \leq R_i + R_j$, где R_i, R_j, r_i, r_j – радиусы и радиусы-векторы центров оболочек. Основным недостатком этого метода является необходимость проверки этого условия на каждом шаге для каждой пары тел, то есть метод является квадратичным по числу тел. Метод связанных линейных списков (Linked Linear List) [2] является значительно более быстрым и линейным по числу тел. Суть метода состоит в следующем. Сначала вокруг каждой частицы описывается квадрат возможно меньшей площади, стороны которого параллельны осям инерциальной системы координат (СК0).

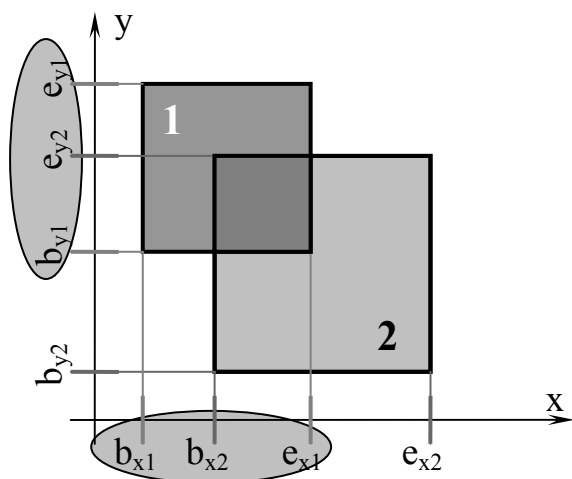


Рис. 2. Определение пересечения квадратных оболочек

варианты: начало одной оболочки поменялось с началом другой, конец одной оболочки – с началом другой, конец одной оболочки – с концом другой, начало одной оболочки – с концом другой. Первый и третий случаи отбрасываются, так как не несут никакой полезной информации. Вторым случаем означает возможность появления нового контакта, что проверяется по списку другой оси. Если контакт подтверждается, пара тел заносится в список контактируемых. Четвертый случай говорит о том, что если данные тела контактировали на предыдущем шаге, то на этом шаге они вышли из контакта и необходимо удалить эту пару тел из списка контактируемых.

Для определения “ближнего” контакта, т.е. касания многоугольников, также существует несколько методов. Рассмотрим два алгоритма являющихся одними из быстрых. Первый из них – алгоритм Лина-Кенни (Lin-Canny) [3], основанный на использовании так называемых областей Воронова. Этот метод позволяет эффективно определять расстояние между многоугольниками. К сожалению, применение данного алгоритма эффективно только в случае выпуклых многоугольников и не может использоваться для определения факта пересечения многоугольников. Поэтому он идеально подходит для моделей контактных сил на основе классической теории удара небольшого числа тел. Другой метод определяет факт попадания точки внутрь многоугольника по четности числа пересечений луча, проходящего через вершину со сторонами многоугольника. Его описание можно найти в [2]. Однако, наряду с определением факта попадания точки внутрь многоугольника, требуется определение внедрения Δ . Поэтому в данной работе предлагается альтернативный алгоритм, объединяющий обе эти задачи и являющийся, на наш взгляд, значительно более быстрым.

Назовем предлагаемый алгоритм методом зон чувствительности. Введем нумерацию вершин в порядке обхода многоугольника против часовой стрелки. Перед началом моделирования для каждого многоугольника созда-

Оболочка задается четырьмя параметрами: начало и конец по оси x , начало и конец по оси y . Далее для каждой оси составляется упорядоченный список координат границ оболочек. Если хотя бы одна из границ одного тела лежит внутри границ другого для каждой оси, то оболочки этих тел пересекаются и возможен “близкий” контакт. На каждом шаге интегрирования списки сортируются по координатам границ. Если две каких-либо границы в списке поменялись местами, то возможны следующие

ется массив данных, имеющий длину, равную числу вершин n_v . Каждый элемент массива с номером i содержит (рис. 3): радиус-вектор вершины относительно центра масс тела ρ_i , единичный вектор, направленный вдоль стороны многоугольника e_i к вершине v_{i+1} ($v_{n+1} \equiv v_1$), вектор наружной биссектрисы прилегающего угла b_i , глубина зоны чувствительности соседней стороны δ (эмпирическая величина – некоторая доля радиуса описанной около многоугольника окружности), длина присоединенной стороны l_i .

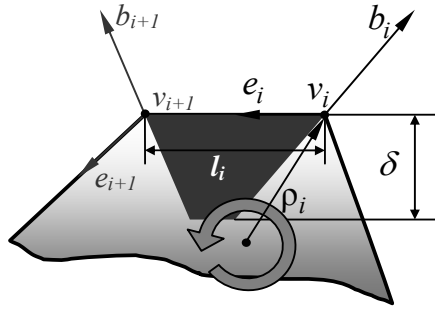


Рис. 3. Зона чувствительности точки v_i и ее параметры

Зона чувствительности образуется самой стороной, перпендикулярными лучами, проведенными через соседние вершины, прямой, параллельной стороне и лежащей “внутри” многоугольника на расстоянии глубины чувствительности, и парой биссектрис соседних к стороне углов.

Сначала рассчитываются введенные характеристики вершин пары гранул i, j в СК0

$$r_{va} = r_a + A_{0a}\rho_a^a, \quad e_a = A_{0a}e_a^a, \quad b_a = A_{0a}b_a^a, \quad a = i, j,$$

где r_{va} - радиус-вектор гранулы a относительно СК0; индексы вершин для краткости опущены.

Далее определяются вершины гранулы i , попадающие внутрь многоугольника гранулы j . С этой целью для каждой вершины гранулы i проверяется факт попадания в зону чувствительности каждой вершины гранулы j . Для проверки попадания в зону чувствительности рассчитываются ориентированные расстояния от вершины v_i до стороны и биссектрис прилежащих углов (рис. 4):

$$d_{ij}^e = -e_{jy}(r_{vix} - r_{vjx}) + e_{jx}(r_{viy} - r_{vjy});$$

$$d_{ij}^b = -b_{jy}(r_{vix} - r_{vjx}) + e_{jx}(r_{viy} - r_{vjy});$$

$$d_{ij+1}^b = b_{j+1y}(r_{vix} - r_{vj+1x}) - e_{j+1x}(r_{viy} - r_{vj+1y}).$$

Точка попадает в зону чувствительности при одновременном выполнении следующих условий: $d_{ij}^e \in [0, \delta_j]$, $d_{ij}^b, d_{ij+1}^b \geq 0$. Число проверок на попадание вершин в зоны чувствительности можно уменьшить примерно вдвое при дополнительном условии:

$$(r_{jx} - r_{ix})e_{jx} + (r_{jy} - r_{iy})e_{jy} \geq 0.$$

Точка, попавшая в зону чувствительности, считается попавшей в многоугольник, если выполнены дополнительные условия

$$\frac{e_{vjx}(r_{v_{iy}} - r_{v_{jy}}) - e_{v_{jy}}(r_{v_{ix}} - r_{v_{jx}})}{e_{vjx}b_{v_{iy}} - e_{v_{jy}}b_{v_{ix}}} \leq 0;$$

$$0 \leq -\frac{b_{v_{ix}}(r_{v_{iy}} - r_{v_{jy}}) - b_{v_{iy}}(r_{v_{ix}} - r_{v_{jx}})}{e_{vjx}b_{v_{iy}} - e_{v_{jy}}b_{v_{ix}}} \leq l_j,$$

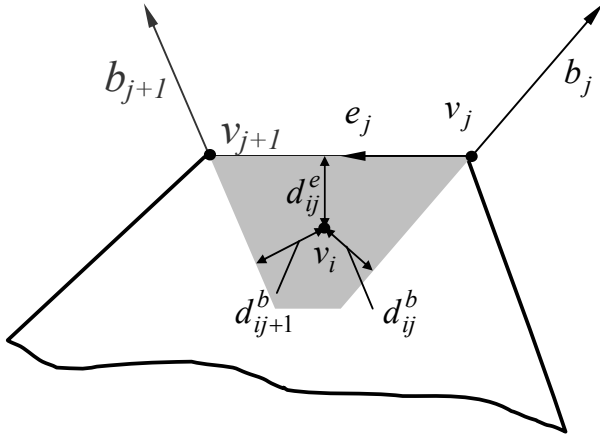


Рис. 4. Ориентированные расстояния от вершины v_i до стороны и биссектрис прилежащих углов вершины v_j

которые гарантируют пересечение стороны, присоединенной к вершине v_j , внутренней биссектрисой стороны v_i .

Эта проверка позволяет исключить случаи аналогичные представленному на рис. 5. Затем частицы в алгоритме меняются местами и выполняются аналогичные действия. Данный метод работает как для выпуклых, так и для невыпуклых многоугольников. Для численного интегрирования уравнений движения балласта применялся неявный метод Парка [4, 5] с расчетом приближенных матриц Якоби.

Предложенный ранее метод расчета приближенных матриц Якоби [6], показавший свою эффективность при моделировании различных технических систем, в случае моделировании балласта приводит к значительному увеличению профиля матрицы системы и многократному замедлению расчетов

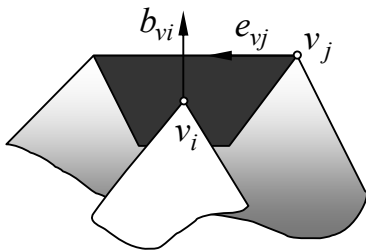


Рис. 5. Случай, соответствующий “непопаданию” внутрь многоугольника

Поэтому был разработан метод блочно-диагональных матриц Якоби. В соответствии с разработанной методикой для отдельной контактной силы $F_{ij}^c(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j)$, действующей на тело i , в матрицу Якоби входят производные $\partial F_{ij}^c / \partial q_i, \partial F_{ij}^c / \partial q_j$, а смешанные производные $\partial F_{ij}^c / \partial q_j, \partial F_{ij}^c / \partial q_i$

игнорируются. Вычислительные затраты на выполнение одного шага интегрирования в данном случае всего лишь на 10-20% превосходят соответствующие затраты при отсутствии матриц Якоби, поэтому резко повышается производительность расчета из-за увеличения шага интегрирования и улучшения условий сходимости численного метода.

Разработанные алгоритмы реализованы в виде отдельного модуля “Балласт” программного комплекса “Универсальный механизм”. Модуль включает возможность задания необходимых параметров системы, таких как статистика геометрических размеров и формы частиц, физические параметры контакта, геометрия области заполнения, параметры виброуплотнения, параметры заполнения. В качестве выходных параметров выступают локальная и глобальная пористости, усадка балласта, кинетическая энергия всей системы, вертикальная координата центра тяжести системы, векторы контактных сил, средняя и максимальная скорость частиц балласта. Также есть возможность цветовой раскраски частиц по скорости, контактным силам, изображения силовых цепей.

Моделирование проходит в несколько этапов. Сначала задаются параметры системы, и генерируется сам балласт. Затем проходит этап заполнения балластной призмы. Последний этап – уплотнение балласта за счет вибрации стенок и основания области заполнения. Уплотнение может быть трех видов: горизонтальное, вертикальное и комбинированное.

Некоторые результаты численного моделирования процесса заполнения балластом прямоугольной области представлены ниже.

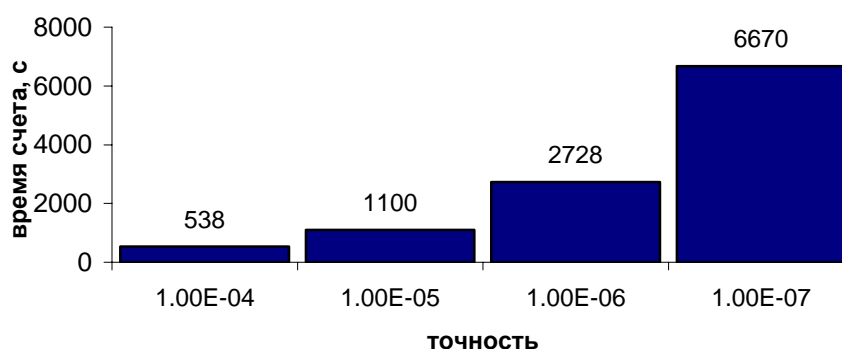


Рис. 6. Зависимость времени счета от точности интегрирования



Рис. 7. Зависимость времени счета от контактной частоты

Модельное время 2 с. Доля демпфирования 0,9 от критического.
Расчеты проводились на ПВМ с процессором Athlon XP 2700+, 512 Мб ОЗУ.

Таким образом, разработанные алгоритмы формирования балласта заданной структуры и моделирование его динамики при заполнении и виброуплотнении позволяют исследовать динамические свойства модели балласта включающей до нескольких тысяч тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Погорелов Д.Ю., Павлюков А.Э., Юдакова Т.А., Котов С.В.* Моделирование контактных взаимодействий в задачах динамики систем тел // Динамика, прочность и надежность транспортных машин: Сб. науч. тр. / Под ред. В.И. Сакало. – Брянск, -2001. - С. 11-23.
2. *Beate Muth, Peter Eberhard, and Stefan Luding.* Contact Simulation for Many Particles Considering Adhesion // *Mechanics of Structures and Machines.*-2002.- 1-28.
3. *Mirtich B.V.* Impulse-based Dynamic Simulation of Rigid Body Systems. Thesis/ GRADUATE DIVISION of the UNIVERSITY of CALIFORNIA at BERKELEY, 1996.
4. *Гарг В.К., Дуккипати Р.В.* Динамика подвижного состава: Пер с англ / Под ред. Н.А.Панькина. – М.: Транспорт, 1988. – 391 с.
5. *Pogorelov D.Yu.* Differential-algebraic equations in multibody system modeling.//Numerical algorithms-1998.
6. *Pogorelov D.Yu.* On Calculation of Jacobian Matrices in Simulation of Multibody Systems// Preprints of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems.: Prague.2002.-V.II. P.159-164.